Visoka poslovna škola
strukovnih studija
LESKOVAC

Висока пословна школа
струковних студија
ЛЕСКОВАЦ

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

mr Valentina Stanković

Leskovac, 2016.

VISOKA POSLOVNA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA LESKOVAC

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

mr Valentina Stanković, predavač

Leskovac, 2016

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

mr Valentina Stanković, predavač

Izdavač:
VISOKA POSLOVNA ŠKLA STRUKOVNIH STUDIJA LESKOVAC

Urednik publikacije:
mr Dragan Stojanović, predavač

Recenzenti:
Prof. dr Dragan Stevanović
Prof. dr Marko Milošević

***Štampa*:**
SCERO-print - Niš

***Štampa*:**
Tiraž: 160

ISBN:
978-86-84331-64-1

SADRŽAJ

1. PRESLIKAVANJE, FUNKCIJA 6

1.1. Vrste preslikavanja 8

1.2. Proizvod preslikavanja 9

1.3. Inverzno preslikavanje (funkcija) 10

1.4. Neke osobine realnih funkcija jedne promenljive 11

2. MATRICE I DETERMINANTE 15

2.1. Operacije sa matricama 16

2.2. Determinante 19

2.3. Inverzna matrica 22

3. GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE 33

3.1. Granična vrednost funkcije 33

3.2. Osobine graničnih vrednosti funkcija 35

3.3. Neprekidnost funkcije 35

3.4. Asimptote funkcije 38

4. IZVOD FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE 42

4.1. Izvodi nekih elementarnih funkcija 43

4.2. Pravila za diferenciranje 46

4.3. Osnovne teoreme diferencijalnog računa 51

4.4. Monotonost funkcije 52

4.5. Ekstremne vrednosti funkcije 54

4.6. Konveksnost funkcije i prevojne tačke 55

4.7. Lopitalova pravila 58

4.8. Analiza toka funkcije 60

4.9. Diferencijal funkcije 71

5. NEODREĐENI INTEGRAL 73

5.1. Integracija pomoću smene 76

5.2. Parcijalna integracija 80

5.3. Integracija racionalnih funkcija 83

6. ODREĐENI INTEGRAL 90

6.1. Izračunavanje i osnovne osobine određenog integrala 92
6.2. Integracija pomoću smene 93
6.3. Parcijalna integracija određenog integrala 94
6.4. Nesvojstveni integrali 94
7. EKONOMSKE FUNKCIJE 97
7.1. Funkcije tražnje i ponude 97
7.2. Funkcija prihoda 101
7.3. Funkcija troškova 106
7.4. Funkcija dobiti 110
7.5. Elastičnost funkcije 116
7.5.1. Elastičnost tražnje 117
8. FINANSIJSKA MATEMATIKA 120
8.1. Procentni račun 120
8.2. Modeli kamatnog računa 124
8.2.1. Prost kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom 125
8.2.2. Složen kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom 129
8.2.3. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa dekurzivnom kamatnom stopom 136
8.2.4. Prost kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom 140
8.2.5. Složen kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom 141
8.2.6. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa anticipativnom kamatnom stopom 144
8.3. Krediti 150
8.3.1. Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom 150
8.3.2. Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom 157
DODATAK 167

1. PRESLIKAVANJE, FUNKCIJA

Dekartov proizvod dva skupa *A* i *B* je skup uređenih parova (*x*, *y*), gde prvi element uređenog para pripada skupu *A*, a drugi element uređenog para pripada skupu *B*.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

Definicija 1. Neka su A i B neprazni skupovi. Preslikavanje (funkcija) skupa A u skup B u oznaci f : A$\rightarrow$ B je svaki podskup skupa A$\times$B koji zadovoljava sledeće uslove:

(1) skup svih prvih komponenata skupa *f* je skup A – ***obuhvaćenost skupa***

(2) $(\forall x \in A)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$ ili

$(\forall x \in A)(\exists! y \in B | (x, y) \in f)$ - ***jednoznačnost***

Primer 1. Neka je A = {1, 2, 3}, B = {*x*, *y*} i neka je *f* = {(1,*x*), (2, *y*)}. Da li je *f* preslikavanje?

Dekartov proizvod skupova *A* i *B* je $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$ i f jeste podskup skupa A$\times$B. Skup prvih komponenti skupa *f* je {1, 2}. Element 3 ne pripada tom skupu, tj. 3 se ne preslikava ni u jedan element skupa B, pa nije ispunjen uslov (1) iz definicije. Dakle *f* nije preslikavanje.

Primer 2. Neka je A = {*a*, *b*}, B = {1, 2, 3} i neka je *g* = {(*a*,1), (*a*,2), (*b*,3)}. Da li je *g* preslikavanje?

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$ i g jeste podskup skupa A$\times$B. Skup prvih komponenata skupa *g* je {*a*, *b*}, dakle prvi uslov iz definicije je ispunjen. Međutim *g* ipak nije preslikavanje jer se elemnt *a* skupa A preslikava u dva različita elementa skupa B, pa nije ispunjen uslov (2) iz definicije.

Primer 3. Neka je A = $\{a, b, c\}$, B = $\{x, y, z, w\}$ i neka je $h = \{(a,x), (b,z), (c, y)\}$.

$$A\times B = \{(a,x),(a,y),(a,z),(a,w),(b,x),(b,y),(b,z),(b,w),(c,x),(c,y),(c,z),(c,w)\}$$

Dakle $h \subset$ A×B i h jeste preslikavanje jer su ovom slučaju zadovoljena obadva uslova iz definicije.

Ako $(x, y) \in f$ onda možemo zapisati $y = f(x)$. Prvi element uređenog para (x, y) nazivamo ***original***, a drugi element uređenog para, y je ***slika*** originala x. Za preslikavanje f : A→ B, A je skup svih originala i zove se ***domen*** ili ***oblast definisanosti***, skraćeno Df i obeležava se sa $Dom(f)$. f(A) je skup svih slika i zove se ***kodomen*** i obeležava se skraćeno sa $\overline{Df}$ ili $Codom(f)$ i važi $f(A) \subseteq B$.

Po definiciji je $Dom(f) = A$ i $Codom(f) = f(A)$.

Primer 4. Pretpostavimo da je zavisnost mesečnih prosečnih troškova domaćinstva za hranu (C) od ukupnih mesečnih prihoda (Y) data sledećom relacijom

C = 12 000 + 0,3 Y.

Za prihod od 48 000 dinara, troškovi iznose 12 000 + 0,3 × 48 000 = 26 400. Za prihod od 64 000 dinara, troškovi iznose 12 000 + 0,3 × 64 000 =31 200. Za bilo koju vrednost prihoda, dobijamo tačno jednu vrednost troškova. Prihod i troškovi su pozitivne veličine, pa je data relacija jedan primer funkcije C : $R^+ \to R^+$ (R^+ je skup pozitivnih realnih brojeva)

Veza između vrednosti dveju promenljivih može biti predstavljena funkcijom samo u slučaju kada jednoj vrednosti jedne promenljive odgovara tačno jedna vrednost druge promenljive (jednoznačnost).

U ekonomiji tražnja zavisi od cene i tu zavisnost predstavljamo u opštem obliku $Q_d = f(p)$, $Q_d : R^+ \to R^+$. Cena p je nezavisna promenljiva, a tražnja Q_d je zavisna promenljiva.

Primer 5. Neka je funkcija tražnje za neki proizvod $Q_d = 12\ 000 - 3P$.

Za $P = 100$, $Q_d = 12\ 000 - 3 \times 100 = 11\ 700$,

za $P = 200$, $Q_d = 12\ 000 - 3 \times 200 = 11\ 400$.

Funkcija može da ima i više nezavisno promenljivih. Na primer prihod zavisi od cene i količine prodatog proizvoda pa se izražava u opštem obliku $P = f(x, p)$, gde je x količina proizvoda, a p cena. P je zavisna promenljiva, a x i p su nezavisne promenljive.

Ovde ćemo proučavati funkcije od jedne promenljive na skupu realnih brojeva $f : A \to B, A \subseteq R, B \subseteq R$.

1.1. *Vrste preslikavanja*

1) ***Konstantno preslikavanje*** je preslikavanje $f : A \to B$ za koje važi $((\forall x \in A) f(x) = c, c \in B)$. Konstantno preslikavanje preslikava svaki element domena u jedan isti elemet kodomena.
   Primer ovakvog preslikavanje je $f : R \to R,\ f(x) = 3$.

2) ***Identično preslikavanje*** Preslikavanje $f : A \to A$ je identično preslikavanje ako i samo ako (akko) $(\forall x \in A)(f(x) = x)$. Jednostavnije rečeno, preslikavanje kojim se svaki element skupa A preslikava u samog sebe naziva se identično (ili identičko) preslikavanje. Identično preslikavanje $A \to A$ se označava sa I_A.

3) Preslikavanje $f : A \to B$ je ***sirjekcija*** ili „***na***“ akko je $Codom(f) = B$, (odnosno ako je svaki element skupa B slika nekog elementa skupa A). Ili se može kraće zapisati
   $f : A \to B$ je *sirjekcija* ili „*na*“ $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$, tj $B = f(A)$.

4) Preslikavanje $f: A \to B$ je **„1–1“** ili ***injekcija*** ako različitim originalima odgovaraju različite slike.

$f: A \to B$ je *injekcija* ili „1–1“ $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$,

ili

$f: A \to B$ je *injekcija* ili „1–1“ $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

5) Preslikavanje $f: A \to B$ je ***bijekcija*** akko je injekcija i sirjekcija. Takvo preslikavanje se još naziva uzajamno jednoznačno preslikavanje.

1.2. Proizvod preslikavanja

***Definicija* 2:** Neka je $f: A \to B$ preslikavanje takvo da je $f(A) = B$ i neka je $g: B \to C$ preslikavanje. Preslikavanje $h: A \to C$ određeno sa

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ nazivamo ***proizvod*** (kompozicija, slaganje) ***preslikavanja*** f i g.

Za operaciju „proizvod preslikavanja“ važi asocijativni zakon
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, dok komutativnost ne važi, $f \circ g \neq g \circ f$.

Primer. Neka su $f(x) = 2x$ i $g(x) = 3^x$. Odrediti $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3^x) = 2 \cdot 3^x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 3^{2x}$. Ovaj primer potvrđuje da za proizvod preslikavanja ne važi komutativnost.

1.3. Inverzno preslikavanje (funkcija)

Definicija 3: Neka su $f : A \to B$ i $f^* : B \to A$ preslikavanja za koja važi $f \circ f^* = I_B$ i $f^* \circ f = I_A$. Tada kažemo da je f^* ***inverzno preslikavanje***, za preslikavanje f i obeležavamo ga sa $f^{-1} = f^*$.

$$f \circ f^{-1} = I_B : B \to B, \quad f^{-1} \circ f = I_A : A \to A$$

***Teorema 1*: **Neka je $f : A \to B$ preslikavanje. Za preslikavanje f postoji inverzno preslikavanje f^{-1} ako i samo ako je f *bijekcija*.

Primer 1. Odredi inverznu finkciju funkcije $f(x) = 3x + 1$.

Inverznu funkciju ćemo odrediti iz uslova $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(t) = 3t + 1 = x$, uveli smo smenu $t = f^{-1}(x)$.

Iz $3t + 1 = x$ sledi da je $t = \frac{1}{3}(x - 1)$, pa je $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$ inverzna funkcija funkcije *f*.

Ako *f* nije bijekcija onda se ne može definisati inverzno preslikavanje.

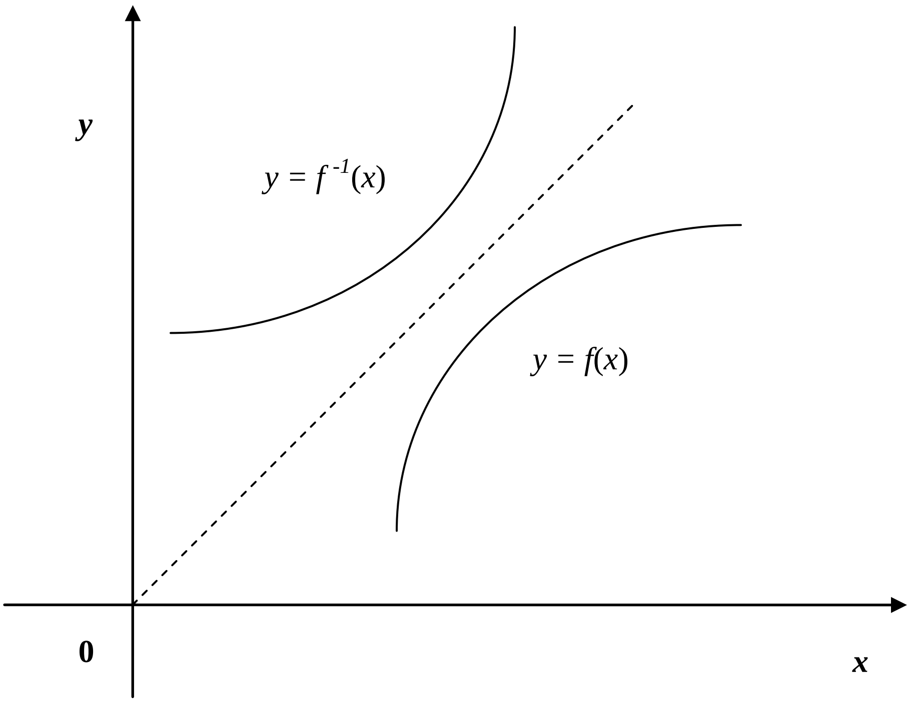
Inverznu funkciju možemo odrediti i na drugi način. Rešavanjem jednačine kojom je zadata funkcija $y = f(x)$ po x dobijamo inverznu funkciju oblika $x = g(y)$. Međutim funkcija se obično obeležava sa *y* a argument sa *x*, pa promenom oznaka dobijamo $y = g(x)$.

Primer 2. Za funkciju $y = 2x + 8$, inverzna funkcija se dobija na sledeći način:

$$y = 2x + 8$$
$$y - 8 = 2x$$
$$0{,}5y - 4 = x$$

Inverzna funkcija je $x = 0{,}5y - 4$, promenom oznaka inverzna funkcija dobija oblik $y = 0{,}5x - 4$.

Grafici uzajamno inverznih funkcija su simetrični u odnosu na pravu $y = x$ (simetrala I i III kvadranta).



1.4. Neke osobine realnih funkcija jedne promenljive

Preslikavanje $f : A \to R$ gde je $A \subseteq R$ (R je skup realnih brojeva) nazivamo realnom funkcijom jedne promenljive i nadalje ćemo pod pojmom funkcija podrazumevati realnu funkciju jedne promenljive.

1) ***oblast definisanosti,*** skup A, je skup realnih brojeva iz koga argument x može uzimati vrednosti, odnosno za te vrednosti se može izračunati vrednost funkcije $y = f(x)$.

   Na primer, za funkciju $y = x^2$ oblast definisanosti je $(-\infty,+\infty)$, odnosno skup realnih brojeva, ali je za funkciju $y = \sqrt{x}$ oblast definisanosti $[0,+\infty)$ jer kvadratni koren od negativnog broja nije realan broj.

2) ***nula funkcije*** $f(x)$ je realan broj $x_0 \in A$ za koji važi da je $f(x_0)=0$. Tačka čije su koordinate $(x_0,0)$ je ***presek grafika funkcije sa x osom***, a tačka sa koordinatama $(0, f(0))$ je ***presek grafika funkcije sa y osom***.

Nula funkcije $y=2x+8$ dobija se rešavanjem jednačine $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ pa je presek grafika funkcije sa *x* osom tačka (-4, 0)

Presek grafika funkcije sa *y* osom dobija se kad se izračuna vrednost funkcije za $x=0$, u ovom slučaju $2\cdot 0+8=8$, je tačka (0, 8).

3) Ako je $(\forall x \in A)(f(-x)= f(x))$ kažemo da je funkcija *f*(*x*) ***parna***, a ako je $(\forall x \in A)(f(-x)=-f(x))$, kažemo da je funkcija *f*(*x*) ***neparna***.

Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna i većina funkcija je takva.

Funkcija $f(x)=x^2$ je parna jer za svako *x* iz skupa realnih brojeva važi

$f(-x)=(-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Funkcija $f(x)=x^3$ je neparna jer je $f(-x)=(-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na *x* osu, a grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

4) Funkcija je ***periodična*** sa osnovnom periodom $T \in R, T>0$, ako je $(\forall x \in A)(f(x+kT)= f(x))$, $k \in R$, gde je *T* najmanji pozitivni broj sa tom osobinom.

Funkcije *sin*(*x*) i *cos*(*x*) su periodične sa periodom $T = 2\pi$

jer je $sin(x + k\cdot 2\pi) = sin(x)$ i $cos(x + k\cdot 2\pi) = cos(x)$.

5) Funkcija $y= f\left(x\right)$ ***monotono rastuća*** na intervalu (*a*, *b*), ako za bilo ke je dve vrednosti sa tog intervala $x_1 < x_2$ važi da je $f\left(x_1\right)< f\left(x_2\right)$. Jednostavnije rečeno, ako raste vrednost argumenta, raste i vrednost funkcije.

Funkcija $y= f\left(x\right)$ ***monotono opadajuća*** na intervalu (*a*, *b*), ako za bilo koje dve vrednosti sa tog intervala $x_1 < x_2$ važi da je $f\left(x_1\right)> f\left(x_2\right)$. Ako raste vrednost argumenta, vrednost funkcije opada.

Funkcija $y = f(x)$ ***monotono neopadajuća*** na intervalu (a, b), ako za bilo koje dve vrednosti sa tog intervala $x_1 < x_2$ važi da je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ako raste vrednost argumenta, vrednost funkcije raste ili ostaje ista, ali ne opada.

Funkcija $y = f(x)$ ***monotono nerastuća*** na intervalu (a, b), ako za bilo koje dve vrednosti sa tog intervala $x_1 < x_2$ važi da je $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ako raste vrednost argumenta, vrednost funkcije opada ili ostaje ista, ali ne raste.

6) Funkcija $y = f(x)$ je ograničena odozgo na intervalu (a, b), ako postoji realan broj M takav, da za bilo koji broj x sa tog intervala važi $f(x) \leq M$ i ograničena odozdo, ako postoji realan broj m takav, da za bilo koji broj x sa tog intervala važi $f(x) \geq m$.

Ako je funkcija $y = f(x)$ ograničena odozgo i ograničena odozdo na intervalu (a, b), onda kažemo da je funkcija ***ograničena*** na tom intervalu. Obeležimo sa $N = max\{|M|, |m|\}$, tada možemo zapisati da je $|f(x)| \leq N$ za svako $x \in (a, b)$.

Pitanja i zadaci

1. Šta je Dekartov proizvod skupova?
2. Kako se definiše preslikavanje?
3. Neka je A = {1, -1, 2, -2, 3}, B = {1, 2, 3, 4} i neka je $f : A \rightarrow B$

   a) f = {(1,1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 3)},

   b) f = {(1,1), (1, 3), (2, 4), (-2, 2), (3, 3)},

   c) f = {(1,4), (2, 3), (-2, 4), (3, 3)} .

   Da li je f preslikavanje? Objasni zašto.
4. Kad kažemo da je neko preslikavanje a) konstantno, b) identično, c) sirjekcija, d) injekcija i f) bijekcija?
5. Odredi vrstu preslikavanja:

   a) $A = \{5,6,7\}, B = \{3,4\}, \; f : A \rightarrow B, \; f = \{(5,3), (6,4), (7,4)\}$,

b) $A=[0,5]$, $B=[-5,0]$, $f: A\to B$, $f=\{(x,y) | y=x-5\}$,

c) $A=[-1,1]$, $B=[0,1]$, $f: A\to B$, $f=\{(x,y) | y=x^2\}$.

6. Kako se definiše proizvod preslikavanja?

7. Neka su a) $f(x)=2x+1$ i $g(x)=2^x$, b) $f(x)=3x-2$ i $g(x)=e^x$, c) $f(x)=\sin x$ i $g(x)=x^2+1$. Odrediti $(f\circ g)(x)$ i $(g\circ f)(x)$.

8. Šta je inverzno preslikavanje?

9. Odredi inverznu funkciju datoj funkciji:

   a) $f(x)=3x+1$, b) $f(x)=\sqrt{x+2}$, c) $f(x)=e^{2x}$, d) $f(x)=x/(x+1)$

10. Šta su nule funkcije?

11. Odredi oblast definisanosti, nule funkcije, presek grafika funkcije sa y osom i znak funkcije:

    1) $y=3x-4$, 2) $y=-x+2$, 3) $y=-2x^2+5x+3$, 4) $y=\dfrac{x^2}{3-x}$,

    5) $y=\dfrac{x^3-1}{x^3-5x^2+6x}$, 6) $y=\sqrt{3-x^2}$, 7) $y=\ln\dfrac{x}{x+1}$, 8) $y=e^{x^2-1}$,

    9) $y=e^{\frac{2}{x-3}}$, 10) $y=\dfrac{x}{2^x-8}$, 11) $y=\ln\dfrac{x}{1-x^2}$, 12) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2}$.

12. Kad kažemo da je funkcija parna, a kad neparna?

13. Ispitaj parnost sledećih funkcija:

    $a)\ y=\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, $c)\ y=\ln\dfrac{2-3x}{2+3x}$, $d)\ y=\dfrac{\cos x}{x}$, $e)\ y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

2. MATRICE I DETERMINANTE

Matrica reda $m \times n$ je pravougana šema brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

koja ima m redova (vrsta) i n kolona. Uređenu n-torku $a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots a_{in}$ nazivamo ***i*-ta vrsta**, a uređenu m-torku $a_{1j}\ a_{2j}\ \ldots a_{mj}$ nazivamo ***j*-ta *kolona***.

Umesto pravougaone šeme opšti oblik matrice možemo kraće zapisati $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Ako je broj kolona matrice jednak broju vrsta, odnosno $m = n$, kažemo da je matrica ***kvadratna***.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{sporedna dijagonala} \\ \\ \\ \textit{glavna dijagonala} \end{array}$$

Elementi $a_{11}\ a_{22}\ \ldots a_{nn}$ kvadratne matrice čine ***glavnu dijagonalu***, a elementi $a_{n1}\ \ldots a_{2n-1} a_{1n}$ čine ***sporednu dijagonalu***.

Matricu dimenzije $1 \times n$ zovemo ***matrica-vrsta***, $A = \left[a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n}\right]$, a matricu dimenzije $m \times 1$ zovemo ***matrica-kolona***. $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

2.1. Operacije sa matricama

Definicija 1. Neka su $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ matrice i neka je $\lambda\in R$. ***Zbir matrica*** A i B je matrica $C=A+B$ određena sa $C=[c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.
Proizvod skalara λ i matrice A je matrica D određena sa $D=\lambda\cdot A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

Iz definicije vidimo da se mogu sabirati samo matrice istih dimenzija (broj vrsta u prvoj matrici jednak je broju vrsta u drugoj matrici i broj kolona u prvoj matrici jednak je broju kolona u drugoj matrici).

Primer. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 0 & 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Matricu čiji su svi elemnti 0, nazivamo ***nula-matrica*** $O=[0]_{m\times n}$.

Osobine zbira matrica i proizvoda matrice i skalara

Neka su A, B i C matrice istog tipa i neka su α i β realni brojevi. Tada važi:

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ ***asocijativni zakon***

2) $A+B=B+A$ ***komutativni zakon***

3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

4) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$

5) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$

6) $O+A=A+O=A$ ***nula-matrica je neutralni element za sabiranje matrica***.

Jedinična matrica reda n u oznaci I_n je kvadratna matrica reda n čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, a svi ostali nule.

Primer. $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Nadalje ćemo jediničnu matricu obeležavati samo sa I bez indeksa.

Definicija 2. Neka su $A=[a_{ij}]_{m\times k}$ i $B=[b_{ij}]_{k\times n}$ matrice. ***Proizvod matrica*** A i B je matrica

$$C=A\cdot B=\left[\sum_{r=1}^{k}a_{ir}b_{rj}\right]_{m\times n}.$$

Dve matrice mogu da se pomnože samo u slučaju kada je broj kolona u prvoj matrici jednak broju redova u drugoj matrici.

Primer. Za $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ izračunaj $A\cdot B$ i $B\cdot A$.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 1\\2\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&3\\7&1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot 1+0\cdot 0\\3\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot 0\\1\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&2\\5&7&3\\3&3&1\end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog primera možemo zaključiti da za proizvod dve matrice ne važi komutativni zakon, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Osobine proizvoda matrica

Neka su A, B i C matrice i $\alpha\in R$ (α je realan broj). Tada važi:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ ***asocijativni zakon***

2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ ***distributivnost proizvoda prema zbiru sa leve***

$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$ ***i desne strane***

3) $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$

4) $I\cdot A=A\cdot I=A$ ***jedinična matrica je neutralni element za proizvod matrica.***

Stepen matrice

Za kvadratnu matrci A i $n, p, q\in N$ (n, p i q su prirodni brojevi) važi

$A^0=I$,

$A^1=A$,

$A^2=A\cdot A$,

$A^n=A^{n-1}\cdot A=A\cdot A^{n-1}$,

$A^p\cdot A^q=A^{p+q}$

Definicija 3. Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica. ***Transponovana matrica*** matrice A u oznaci A^T je matrica $A^T = [a_{ij}]^T{}_{m\times n} = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Dakle, transponovana matrica matrice A se dobija tako što vrste i kolone zamene mesta.

Primer. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. Determinante

Neka je A kvadratna matrica reda n, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Svakoj kvadratnoj matrici se pridružuje determinanta u oznaci $det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & .. & \cdots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta je realan broj koji se izračunava na sledeći način:

1) ako je $n = 1$, $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ (determinanta I reda)

2) ako je $n = 2$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (determinanta II reda)

3) ako je $n = 3$, za izračunavanje determinante može da se koristi ***Sarusovo pravilo***.

   Ako su elementi determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, dopisujemo elemente

   prve i druge kolone i računamo vrednost determinante prema sledećem obrascu

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

.

Za izračunavanje determinante reda $n \geq 2$, mogu se primeniti ***Laplasove formule***. Najpre je potrebno je da definišemo pojmove ***minor*** i ***kofaktor***.

Definicija 1. Minor M_{ij} koji odgovara elemnu a_{ij} kvadratne matrice A reda n je determinanta reda $n - 1$ koja se dobija izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone u determinanti A.

Definicija 2. Neka je M_{ij} minor elemnta a_{ij} kvadratne matrice A reda n. ***Kofaktor*** elementa a_{ij} matrice A u oznaci A_{ij} je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Neka je A kvadratna matrica reda *n*. ***Determinanta*** *det*(*A*) je broj koji se izračunava po formuli

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$ - ***Laplasov razvoj po i-toj vrsti***;

ili po formuli

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$ - ***Laplasov razvoj po j-toj koloni***;

Primer 1. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 2\cdot(-1)\cdot 3+(-3)\cdot 6\cdot 0+4\cdot 1\cdot 0-$$

$$(-3)\cdot 1\cdot 3-2\cdot 6\cdot 0-4\cdot(-1)\cdot 0=-6+0+0+9-0-0=3$$

Za determinante važe sledeća svojstva:

1) Aku su u kvadratnoj matrici elementi jedne vrste (kolone) jednaki ili proporcionalni elemntima druge vrste (kolone), tada je $det(A) = 0$;
2) Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone matrice A nule, onda je $det(A) = 0$;
3) Za proizvoljne kvadratne matrice A i B reda n važi $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$;
4) $det(I_n) = 1$, determinanta jedinične matrice bilo kog reda je 1.
5) $det(A^T) = det(A)$.

Primer 2. Izračunaj vrednost determinante $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Kako je u pitanju determinanta matrice reda 4, za izračunavanje ćemo upotrebiti Laplasov razvoj. Za Laplasov razvoj po prvoj vrstai potrebno je da izračunamo kofaktore $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ i}$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 2, a_{14} = 1$

$$det(A) = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} A_{ik} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$$

Kako je element $a_{12} = 0$, nismo morali da računamo vrednost kofaktora A_{12}. Za izračunavanje smo mogli da koristimo i Laplasov razvoj po drugoj koloni. U toj koloni su elementi $a_{12} = 0$ i $a_{22} = 0$ nule tako da nema potreba za izračunavanjem kofaktora A_{12} i A_{22}. Računamo samo kofaktore A_{32} i A_{42}.

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \; A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\det(A) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-7) = -1.$$

2.3. Inverzna matrica

Definicija 1. Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako postoji kvadratna matrica B reda n takva da važi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, kažemo da je B ***inverzna matrica*** matrice A i zapisujemo $A^{-1} = B$.

Definicija 2. Za kvadratnu matricu A reda n kažemo da je ***regularna*** ako je $det(A) \neq 0$. U suprotnom kažemo da je matrica ***singularna***.

Formula za izračunavanje inverzne matrice

Za kvadratnu matricu reda n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$, inverzna matrica A^{-1}

izračunava se po sledećoj formuli

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & .. & \cdots & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & .. & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & .. & \cdots & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & .. & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

gde je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij}.

Na osnovu formule zaključujemo da samo za regularne matrice postoji inverzna matrica. Matrice za koje postoji inverzna matrica nazivamo invertibilne matrice.

Teorema: Ako su matrice A i B regularne tada važi:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Dokaz:

$B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot(A\cdot B)=B^{-1}(A^{-1}\cdot A)\cdot B=B^{-1}\cdot I\cdot B=B^{-1}\cdot B=I$

(na osnovu asocijativnosti proizvoda matrica)

$(A\cdot B)\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$

Pošto smo definisali operacije sabiranje i množenje matrica, sada možemo da rešavamo i matrične jednačine, jednačine kod kojih se sa X označava nepoznata matrica.

Primer 3. Rešiti po X matričnu jednačinu $A(X-2I)+B=I$

gde je $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Prvi korak kod rešavanja matrične jednačine je izraziti X iz jednačine. Pri tome treba voditi računa da za sabiranje matrica važi komutativnost tj. $A+B=B+A$, dok za množenje matrica komutativnost ne važi: $AB \neq BA$. Posmatramo levu stranu matrične jednačine. Ona je zbir izraza $A(X-2I)$ i matrice B. Zato najpre oduzimamo matricu B od leve i desne strane matrične jednačine

$$A(X-2I)+B-B=I-B$$

$$A(X-2I)=I-B$$

Opet posmatramo levu stranu jednačine. Imamo proizvod matrice A i izraza X - 2I Kako bismo eliminisali matricu A sa leve strane jednačine, jednačinu množimo inverznom matricom A^{-1} sa leve strane zato što je

$A^{-1}A=I$ I je jedinična matrica $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A(X-2I)=I-B/\cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}A(X-2I)=A^{-1}(I-B)$$

$$I(X-2I)=A^{-1}(I-B)$$

za množenje jediničnom matricom važi $A\cdot I=I\cdot A=A$, pa dobijamo

$X-2I=A^{-1}(I-B)/+2I$ sada dodajemo levoj i desnoj strani jednačine 2I

$X-2I+2I=A^{-1}(I-B)+2I$ i jednačina dobija oblik

$$X=A^{-1}(I-B)+2I$$

Pošto smo jednačinu transformisali tako da je sa leve strane ostala samo nepoznata matrica X ostalo je da izračunamo tu matricu.

Najpre računamo inverznu matricu A^{-1} po obrascu:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Determinantu reda 3 možemo izračunati primenom Sarusovog pravila.

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right.=$$

$$2\cdot(-1)\cdot 3+(-3)\cdot 6\cdot 0+4\cdot 10-(-3)\cdot 1\cdot 3-2\cdot 6\cdot 0-4\cdot(-1)\cdot 0=-6+0+0+9-0-0=3$$

Kofaktore A_{ij} računamo na sledeći način: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Minor M_{ij} je determinanta koja se dobija kada se u matrici A izostave i-ta vrsta i j-ta kolona.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot 3-6\cdot 0=-3,$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-(1\cdot 3-6\cdot 0)=-3,$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 0-(-1)\cdot 0=0,$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-(-3)\cdot 3-4\cdot 0=-(-9)=9,$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-4\cdot 0=6,$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-(2\cdot 0-(-3)\cdot 0)=0,$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 6\end{vmatrix}=-3\cdot 6-4\cdot(-1)=-18+4=-14\,,$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-(2\cdot 6-4\cdot 1)=-(12-4)=-8\,,$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-(-3\cdot 1)=-2+3=1\,.$$

Pošto smo izračunali determinantu i kofaktore, inverzna matrica je

$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 9 & 0\\ -3 & 6 & -14\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$. Inverznu matricu možemo ostaviti u ovom obliku, a možemo je i pomnožiti sa $\frac{1}{3}$. Matrica se množi skalarom (brojem), tako što se svaki element matrice pomnoži skalarom.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & -14/3\\ 0 & 0 & -8/3\end{bmatrix}.$$

Iz jednačine $X=A^{-1}(I-B)+2I$, vidimo da najpre treba izračunati $I-B$. Dve matrice se sabiraju (oduzimaju) tako što se sabiraju elementi koji se nalaze na istim pozicijama.

$$I-B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

Sad treba izračunati $A^{-1}(I-B)$. Jednostavnije za računanje je upotrebiti prvi oblik inverzne matrice.

$$A^{-1}(I-B)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 9 & 0\\ -3 & 6 & -14\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 6\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3\cdot 2+9\cdot 2+0\cdot 0 & -3\cdot 0+9\cdot(-2)+0\cdot(-4) & -3\cdot(-2)+9\cdot 0+0\cdot 6\\ -3\cdot 2+6\cdot 2+(-14)\cdot 0 & -3\cdot 0+6\cdot(-2)+(.14)\cdot(-4) & -3\cdot(-2)+6\cdot 0+(-14)\cdot 6\\ 0\cdot 2+0\cdot 2+(-8)\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-2)+(-8)\cdot(-4) & 0\cdot(-2)+0\cdot 0+(-8)\cdot 6\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}12 & -18 & 6\\ 6 & -68 & -78\\ 0 & 32 & 48\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6 & 2\\ 2 & -22\,{}^{2}\!/_{3} & 26\\ 0 & 10\,{}^{2}\!/_{3} & 16\end{bmatrix}.$$

Pre sabiranja $A^{-1}(I-B)$ sa $2I$ morali smo dobijenu matricu pomnožiti sa 1/3.

$$A^{-1}(I-B)+2I=\begin{bmatrix}4 & -6 & 2\\ 2 & -22\,{}^{2}\!/_{3} & 26\\ 0 & 10\,{}^{2}\!/_{3} & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -6 & 2\\ 2 & -20\,{}^{2}\!/_{3} & 26\\ 0 & 10\,{}^{2}\!/_{3} & 18\end{bmatrix}$$

Dakle rešenje matrične jednačine je $X=\begin{bmatrix}6 & -6 & 2\\ 2 & -20\,{}^{2}\!/_{3} & 26\\ 0 & 10\,{}^{2}\!/_{3} & 18\end{bmatrix}$.

Pitanja i zadaci

1. Šta je matrica?
2. Kako se definiše zbir dve matrice, proizvod skalara i matrice, proizvod dve matrice i stepen matrice? Navedi osobine koje važe za ove operacije.
3. Šta je minor, a šta kofaktor?
4. Šta je determinanta matrice i kako se izračunava? Navedi svojstva determinanti.
5. Šta je inverzna matrica i kako se izračunava?

6. Kad kažemo da je matrica regularna, a kad singularna?

7. Izračunaj: *a*) $2A + B$, *b*) $A - 3B$ ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. Koje se od matrica mogu pomnožiti i u kom redosledu. Izračunati moguće proizvode.

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

4) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,

5) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ -6 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

6) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$,

7) $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -3 & 3\end{bmatrix}$,

8)

$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

9) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 0\end{bmatrix}$,

$C=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 0\end{bmatrix}$

9. Izračunati determinantu matrice: 1) $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

2) $A=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$, 3) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 4)

$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}$

5) $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}$, 6) $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$, 7)

$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 5\\ 4 & 0 & 0 & -2\\ 3 & 5 & 1 & 6\end{bmatrix}$

10. Reši po X matričnu jednačinu

a) $(2I-A^{-1}X)\cdot B^2=I$, gde je $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

b) $B^{-2}(I-XA)=I$, gde je $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 5 & 0 & -1\end{bmatrix}$,

c) $(B^2X-2I)\cdot A^{-1}=I$, gde je $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$, *d*) $(AX-I)B^{-2}=I$, gde je $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$,

e) $A^{-2}(BX-I)=C$ gde je

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

f) $(B^{-2}X+I)\cdot A=C$, gde je

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

g) $(2X+I)\cdot A=C^2$, gde je $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$,

h) $A^2(2X-I)=C$, gde je $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

i) $A^{-1}(I+B^2X)=C$, gde je

$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$j)$ $A^2-(X+B)\cdot C=2I$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

$k)$ $A\cdot(B^2-X)+C=2I$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 5 & 0 & -1\end{bmatrix} C=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

$l)$ $(A^2-X)\cdot B-C=I$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & -4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}.$$

$m)$ $A^2+B(C-X)=3I$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -3\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}7 & -6 & 3\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$n)$ $A\cdot(B^2-X)-C=I$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -5\end{bmatrix}$$

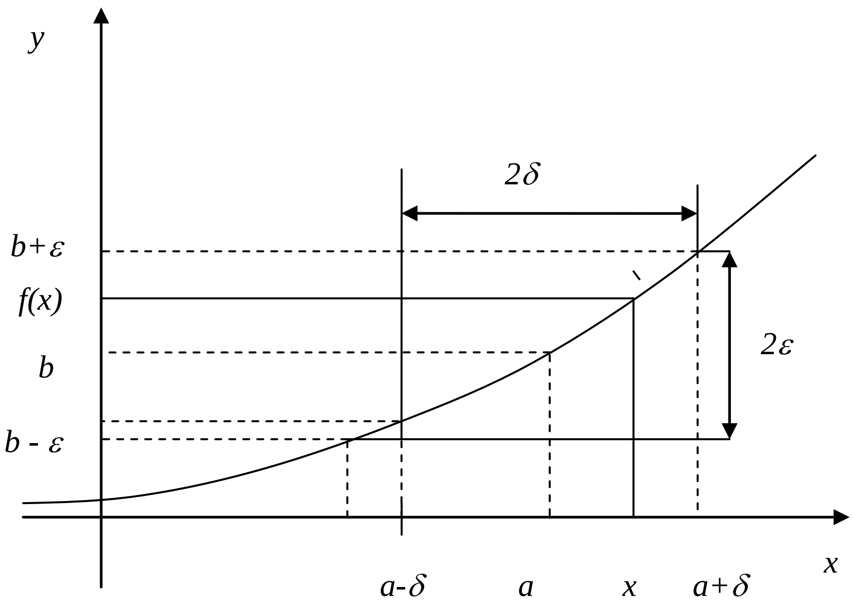
3. GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

3.1. *Granična vrednost funkcije*

ε* -okolina** **tačke** ***a, $a \in R$, je svaki otvoreni interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, prozvoljno mali realan broj. Kad kažemo da *x* pripada ε-okolini tačke *a* to znači da *x* pripada intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Definicija 1. Neka je $f: A \to R, A \subseteq R$ i neka je $a \in R$. Broj $b \in R$ je ***granična vrednost*** funkcije *f* u tački *a*, ako za svaki proizvoljno mali realan $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, δ zavisi od ε, tako da za svako $x \neq a$ za koje je $|x-a| < \delta$ važi da je $|f(x)-b| < \varepsilon$ i tada pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = b .$$



Geometrijski, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, koje zavisi od ε, tako da ako je x iz δ-okoline tačke a ($x \in (a-\delta, a+\delta)$), onda vrednost funkcije u toj tački $f(x)$ pripada ε-okolini tačke b ($f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$).

Funkcija može imati graničnu vrednost i u tački u kojoj nije definisana i takvi slučajevi su bitni kod ispitivanja toka funkcije. Da bismo mogli da nacrtamo grafik funkcije potrebno je da znamo kako se funkcija „ponaša" u okolini tačke ili intervala gde nije definisana.

Primer 1. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} = -3$.

Oblast definisanosti funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$ je $A = (-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$, što znači da funkcija nije definisana u tački -1. Prema definiciji za bilo koje proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ treba naći δ koje zavisi od ε tako da ako je $|x-(-1)| < \delta$ onda je

$$|f(x)-(-3)| < \varepsilon$$

$$|f(x)-(-3)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1} + 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 - x - 2 + 3x + 3}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-(-1)| < \varepsilon$$

U ovom slučaju je $\delta = \varepsilon$ i važi $|x-(-1)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-(-3)| < \varepsilon$. Ova funkcija nije definisana u -1, ali ima graničnu vrednost u toj tački.

Ako u definiciji 1 uslov $|x-a| < \delta$, koji znači da x pripada δ-okolini tačke a, zamenimo uslovom $x \in (a-\delta, a)$, odnosno uslovom $x \in (a, a+\delta)$, dobijamo definicije leve i desne granične vrednosti funkcije u tački a i zapisujemo $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$, odnosno $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$.

Kažemo da za funkciju postoji granična vrednost u tački a ako važi

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

3.2. Osobine graničnih vrednosti funkcija

Teorema 1. Neka su f i g realne funkcije definisane na skupu $A \subseteq R$, $a \in R$ i neka je $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, gde su b i c realni brojevi ($b, c \in R$). Tada važi:

(1) $\lim_{x\to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x) = \alpha \cdot b,\ \alpha \in R$;

(2) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c$;

(3) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c$;

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$, za $c \neq 0$;

(5) $\lim_{x\to a} (f(x))^k = (\lim_{x\to a} f(x))^k = b^k,\ k \in Q$.

(6) $\lim_{x\to\infty} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} f(x)}$

3.3. Neprekidnost funkcije

Ako grafik neke funkcije možemo da nacrtamo u jednom potezu ne podižući olovku sa papira, onda za tu funkciju kažemo da je neprekidna. Ako se grafik funkcije ne može nacrtati u jednom potezu onda ta funkcija ima jedan ili više prekida. Sada ćemo ove pojmove definisati preciznije.

Definicija 2. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, i neka je $x_0 \in A$. Funkcija f je n***eprekidna u tački*** x_0 ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\Delta x = x_1 - x_0$ - nazivamo ***priraštaj argumenta***

$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ - nazivamo ***priraštaj funkcije***

Teorema 2. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$ i neka je $x_0 \in A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) funkcija f je neprekidna u tački x_0;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Definicija 3. Funkcija $f : A \to R, A \subseteq R$, je ***neprekidna na intervalu*** $(a, b) \subseteq A$, ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala.

Definicija 4. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, i neka je $a \in R$. Tačka *a* je ***tačka prekida*** funkcije f ako funkcija nije definisana u tački *a*, ili funkcija jeste definisana ali nije neprekidna u njoj.

Primer. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}, \text{ za } x \neq -2 \\ 10, \text{ za } x = -2 \end{cases}$$

$f(-2) = 10$,

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+8}{x+2} = \begin{pmatrix} \text{uvodimo smenu } x=-2-h \\ \text{gde je } h>0 \\ \text{i } h\to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2-h)^3+8}{-2-h+2} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-8-12h-6h^2-h^3+8}{-2-h+2} = \lim_{h\to 0} \frac{-12h-6h^2-h^3}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-12-6h-h^2)}{-h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-12-6h-h^2}{-1} = \lim_{h\to 0}(12-6h-h^2) = 12$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+8}{x+2} = \begin{pmatrix} \text{uvodimo smenu } x=-2+h \\ \text{gde je } h>0 \\ \text{i } h\to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^3+8}{-2+h+2} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-8+12h-6h^2+h^3+8}{-2+h+2} = \lim_{h\to 0} \frac{12h-6h^2+h^3}{h} = 12$$

Dobili smo da je $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 12 \neq f(-2) = 10$, što znači da je funkcija definisana u tački -2, ali nije neprekidna.

Osobine neprekidnih funkcija

Teorema 3. Neka su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 i neka je $\alpha \in R$ konstanta. Tada su i funkcije $\alpha \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $(g(x_0) \neq 0)$ neprekidne u tački x_0.

Teorema 4. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, i neka je $[a,b] \subset A$. Ako je *f* neprekidna na [*a*, *b*] onda je f i ograničena na [*a*, *b*].

Teorema 5. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, i neka je $[a,b] \subset A$. Ako je *f* neprekidna na $[a, b]$ onda ona dostiže svoju najveću i svoju najmanju vrednost na $[a, b]$.

3.4. Asimptote funkcije

Definicija 5. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, gde je *A* neograničeni interval. Prava $y = ax + b, a, b \in R$ je ***asimptota*** funkcije f kad $x \to +\infty$ ako je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{f(x)} = 1 \wedge \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

ili ***asimptota*** funkcije f kad $x \to -\infty$ ako je

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{ax+b}{f(x)} = 1 \wedge \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 .$$

Asimptotu $y = ax + b$ nazivamo:

(1) ***kosa asimptota*** ako je $a \neq 0$, (2) ***horizontalna asimptota*** ako je $a = 0$.

Prava $y = b$ je horizontalna asimptota udesno ako je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, odnosno horizontalna asimptota ulevo ako je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Sledeća teorema nam daje formule za izračunavanje vrednosti koeficijenata *a* i *b*.

Teorema 6. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$, gde je *A* neograničeni interval. Prava $y = ax + b, a, b \in R, a \neq 0$, je ***kosa asimptota*** funkcije *f* ako i samo ako je

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \wedge b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) .$$

Definicija 7. Neka je $f : A \to R, A \subset R$, i neka je $a \in R$ i $a \notin A$. Prava $x = a$ je za funkciju *f* ***vertikalna asimptota sa desne strane*** ako je

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty ,$$

odnosno ***vertikalna asimptota sa leve strane*** ako je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \vee \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty .$$

Iz prethodne definicije zaključujemo da funkcija koja je definisana na (+∞, -∞) nema vertikalne asimptote.

Iz teoreme 6 zaključujemo da ako funkcija ima horizontalnu asimptotu ne može da ima i kosu asimptotu i obrnuto.

***Primer* 4.** Odrediti asimptote funkcije $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$.

Oblast definisanosti ove funkcije je $Df = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ što znači da funkcija možda ima vertikalnu asimptotu u tački x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x-1} = \begin{pmatrix} x = 1-h \\ h > 0 \\ h \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-h)^2-4}{1-h-1} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2-2h+1-4}{-h} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x-1} = \begin{pmatrix} x = 1+h \\ h > 0 \\ h \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-4}{1+h-1} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h+1-4}{h} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

Dakle prava x = 1 jeste vertikalna asimptota. Na osnovu dobijenih graničnih vrednosti zaključujemo da kada za x uzimamo vrednosti levo od 1, funkcija teži +∞, a kada za x uzimamo vrednosti desno od 1, funkcija teži -∞.

Sada tražimo vrednost koeficijenata a i b kako bismo utvrdili da li postoji kosa asimptota. Prema teoremi 6 je

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1$$

Dakle prava $y = x + 1$ je kosa asimptota. Funkcija nema horizontalnu asimptotu jer je $a \neq 0$.

Pitanja i zadaci

1. Kako se definiše granična vrednost funkcije?
2. Navedi osobine graničnih vrednosti funkcija.
3. Kako se definiše neprekidnost funkcije u tački, a kako na intervalu?
4. Navedi osobine neprekidnih funkcija.
5. Kad kažemo da je prava $y = ax + b$ kosa a kad horizontalna asimptota funkcije? Kako se izračunavaju koeficijenti a i b?
6. Šta je vertikalna asimptota funkcije?
7. Izračunati graničnu vrednost funkcija: *a*) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$, *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$, *c*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x+1}$, *d*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$, *e*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9}$.
8. Polazeći od $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, izračunati sledeće granične vrednosti:

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$, *c*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$, *d*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$
9. Odrediti asimptote funkcije: *a*) $f(x)=\dfrac{x^2}{3-x}$, *b*) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$,

   c) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{3(x+2)^2}$, *d*) $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$, *e*) $f(x)=\ln\dfrac{2x-1}{x+3}$, *f*) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$.
10. Ispitati neprekidnost funkcije:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+5}{3}, \text{ za } x\in[-\infty,2]\\ x^2-1, \text{ za } x\in(2,3)\\ e^{x-2}, \text{ za } x\in[3,+\infty)\end{cases}$$ u tačkama $x_0=2$ i $x_0=3$.

4. IZVOD FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$ i x_0 tačka skupa *A*. Sa $U(x_0)$ obeležavamo okolinu tačke x_0. Neka je x proizvoljna tačka iz U - okoline tačke x_0, $x \in U(x_0),\ x \neq x_0$. Sa Δx označavamo priraštaj argumanta $\Delta x = x - x_0$, a sa $\Delta f(x)$ (ili Δy) priraštaj funkcije $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Definicija 1. Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$ i neka je $U(x_0)$ okolina tačke $x_0 \in A$. Neka je $x \in U(x_0),\ x \neq x_0$ i $x = x_0 + \Delta x$. ***Prvi izvod funkcije*** *f* u tački x_0 u oznaci $f'(x_0)$, je granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako ona postoji i ako je konačna.

Kako je $x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$, prvi izvod funkcije f možemo definisati i kao graničnu vrednost količnika priraštaja funkcije $\Delta f(x)$ i priraštaja argumenta Δx što zapisujemo $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Iz $x = x_0 + \Delta x$, kad $\Delta x \to 0$ onda $x \to x_0$ pa prvi izvod funkcije možemo zapisati u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako funkcija f ima prvi izvod u tački x_0, onda kažemo da je ona ***diferencijabilna u tački*** x_0.

Neka je $(a,b) \subset A$. Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački intervela (a,b) onda se kaže da je funkcija *f* ***diferencijabilan na intervalu*** (a,b). Funkciju *f'*(*x*) nazivamo ***izvodna funkcija***, a postupak određivanja izvodne funkcije nazivamo ***diferenciranje***.

Primer 1. Na osnovu definicije izvoda nađi izvod funkcije

$f(x) = \sqrt{x}$, za $x \in [0,+\infty)$.

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Teorema 1. (o odnosu neprekidnih i diferencijabilnih funkcija)

Neka je $f: A \to R, A \subseteq R$ i $U(x_0)$ okolina tačke i neka $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Ako je funkcija *f* diferencijabilna u tački x_0, onda je ona i neprekidna u toj tački.

4.1. Izvodi nekih elementarnih funkcija

1. $f(x) = \sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Za izračunavanje ove granične vrednosti upotrebljena je formula za transformisanje razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod trigonometrijskih funkcija $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ i karakteristična granična vrednost $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $f(x) = \ln x$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \begin{pmatrix} t = \frac{x}{\Delta x} \\ \Delta x \to 0 \\ t \to \infty \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Ovde je upotrebljena karakteristična granična vrednost $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Tablica izvoda

(1) $(c)' = 0, c = const. c \in R$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in N$

(3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln a$

(5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(6) $(sinx)' = cosx$

(7) $(cosx)' = -sinx$

(8) $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$

(9) $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$

(10) $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

(13) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4.2. Pravila za diferenciranje

Teorema 2. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ realne funkcije definisane u okolini tačke $x \in R$ i diferencijabilne u tački *x*, i neka su $a, b \in R$. Tada su i funkcije $af(x)$,

$f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ diferencijabilne u tački *x* i pri tom važi

(1) $(af(x))' = af'(x)$

(2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

(3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$.

Dokaz.

(1) $(af(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{af(x+\Delta x) - af(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} =$

(prema teoremi o operacijama sa graničnim vrednostima funkcija, konstantu *a* možemo staviti ispred *lim*)

$= a \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = = af'(x)$ (prema definiciji izvoda funkcije)

(2) $(f(x) + g(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

(3) $\quad (f(x)\cdot g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$

(dodajemo i oduzimamo $f(x+\Delta x)\cdot g(x)$)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot(f(x+\Delta x)-f(x))+f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}=$$

$$=g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Primer 1. Naći izvod funkcija

$a)$ $f(x)=x^3-2x^2+3x-7$

$f'(x)=3x^2-2\cdot 2x+3=3x^2-4x+3$

$b)$ $f(x)=x\cdot\sin x$

$f'(x)=(x)'\sin x+x(\sin x)'=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x=\sin x+x\cos x$

$c)$ $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

$$f'(x)=\frac{(e^x)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$d)$ $f(x)=tgx$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Teorema 3. (***Izvod složene funkcije***) Neka je funkcija f diferencijabilna u tački x i neka je funkcija g diferencijabilna u tački $f(x)$. Onda je funkcija $h = g \circ f$ takođe diferencijabilna u tački x i važi formula

$$h'(x) = ((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Primer 2. Naći izvod funkcije

a) $y = \ln(1 + x^2)$

U ovom slučaju je $y = g(f(x))$, gde je $g(x) = \ln x$ a $f(x) = 1 + x^2$. Pa je

$$y' = (\ln(1 + x^2))' \cdot (1 + x^2)' = \frac{1}{1 + x^2}(1 + x^2)' = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

b) $y = \cos(1 + 3x)$

Izvod složene funkcije možemo tražiti i uvođenjem smene $t = 1 + 3x$, odakle je

$y = \cos t$ a

$$y' = (\cos t)' \cdot t' = (\sin t) \cdot t' = (\sin(1 + 3x)) \cdot (1 + 3x)' = (\sin(1 + 3x)) \cdot 3 = 3\sin(1 + 3x)$$

c) $y = \arcsin x$.

Funkcija $\arcsin x$ je inverzna funkciji $\sin x$, pa odavde sledi $x = \sin y$.

Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$x' = (\sin y)'$

primenjujemo pravilo za diferenciranje složene funkcije

$1 = \sin' y \cdot y'$

$$1 = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Odnosno $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Logaritamski izvod funkcije

Svaku funkciju $f(x)$ možemo zapisati u obliku $f(x) = e^{\ln(f(x))}$. Ako primenimo prethodnu teoremu dobijamo

$f'(x) = \left(e^{\ln(f(x))}\right)' = e^{\ln(f(x))} \cdot (\ln f(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$. Nekada je lakše naći izvod logaritma funkcije $\left(\ln(f(x))\right)'$, nego same funkcije $f'(x)$, pa se logaritamski izvod često koristi u praksi, a naročito kod funkcija oblika $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

Primer 2. Naći izvod funkcija

$a)\ f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in R, x \in R^{+}$

$\ln(f(x)) = \ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$ diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot f(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$b)\ f(x) = a^{x}, x \in R, a \in R^{+} \setminus \{1\}$

$\ln(f(x)) = \ln(a^{x})$

$\ln(f(x)) = x \ln a$

diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln a$$

$f'(x) = \ln a \cdot f(x)$

$(a^{x})' = \ln a \cdot a^{x}$

Ako je funkcija $f'(x)$ diferencijabilna u tački x**,** onda se izvod funkcije

$f'(x)$ naziva ***drugi izvod funkcije*** *f*(*x*) i označava $f''(x) = f^{(2)}(x) \overset{def}{=} (f'(x))'$.

Analogno se definiše

***n*-ti izvod funkcije** $f^{(n)}(x) \overset{def}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

nulti izvod funkcije $f(x)$ je po definiciji $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Primer 3. Naći n-ti izvod funkcije $y = \dfrac{1}{1-x}$. Ovu funkciju možemo zapisati i u obliku $y = (1-x)^{-1}$ $\quad y' = -(1-x)^{-2}(1-x)' = (1-x)^{-2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$y'' = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(1-x)' = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y''' = (2(1-x)^{-3})' = 2\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}(1-x)' = 2\cdot 3(1-x)^{-4} = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$$

Odavde možemo izvući zaključak da je n-ti izvod funkcije $y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Pitanja i zadaci

1. Kako glasi definicija prvog izvoda funkcije?
2. Kad kažemo da je funkcija diferencijabilna u tački, a kad na intervalu?
3. Navedi pravila diferenciranja.
4. Kako glasi pravilo za izvod složene funkcije?
5. Naći izvod sledećih funkcija: 1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 5$,

   2) $f(x) = \ln x + \sin x - \sqrt{x} - \arccos x$, 3) $f(x) = x^2 \cdot \arcsin x$, 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot e^x$, 5) $f(x) = 3^x tgx$, 6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3}$, 7) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$, 8) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2+1}$, 9) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{arctgx}{\ln x}$, 10) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(x^3+1)$.
6. Naći izvod sledećih funkcija: 1) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 1}$,

   2) $f(x) = \sin(3x^2 - x)$, 3) $f(x) = e^{2x+1}$, 4) $f(x) = \ln(\arcsin x) + \ln^2\sqrt{x}$,

   5) $f(x) = \sin^2(x^3 + 2x)$.

7. Naći izvod sledećih funkcija: 1) $y=\dfrac{3-x}{x+1}$, 2) $y=\dfrac{x+1}{2-x}$, 3) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$,

4) $y=\ln\dfrac{2x-1}{x+3}$, 5) $y=\dfrac{(x+1)^2}{\ln x}$, 6) $y=(x^2-1)e^x$, 7) $y=e^{\frac{2-x^2}{1+x}}$,

8) $y=e^{\frac{1+x^2}{1-x}}$, 9) $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{1-2x}}$, 10) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{x-1}}$.

8. Naći izvod sledećih funkcija primenom logaritamskog izvoda:

1) $f(x)=x^{\cos x}$, 2) $f(x)=\left(\dfrac{3+x}{2-x}\right)^x$, 3) $f(x)=(\sin x)^{\sqrt{x}}$, 4) $f(x)=x^x$.

9. Naći *n*-ti izvod funkcije *a*) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$, *b*) $f(x)=\ln x$.

4.3. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Definicija 1. Neka je $f:A\to R, A\subseteq R$ funkcija i neka je $(a,b)\subset A$, i $c\in(a,b)$. Funkcija *f* ima u tački c

(1) ***lokalni maksimum*** ako važi $(\forall x\in(a,b))\, f(x)\le f(c)$

(2) ***lokalni minimum*** ako važi $(\forall x\in(a,b))\, f(x)\ge f(c)$.

Fermaova teorema. Neka je $f:A\to R, A\subseteq R$ funkcija i neka je interval $[a,b]\subset A$. Neka je c tačka intervala, $c\in(a,b)$ u kojoj funkcija dostiže svoju najveću ili najmanju vrednost. Ako je funkcija *f* diferencijabilna u tački *c* onda je $f'(c)=0$.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija u tački *c* dostiže svoju najveću vrednost na intervalu (a,b). Prema prethodnoj definiciji to znači da je za svaku tačku *x* iz intervala (a,b), $f(c)\ge f(x)$ odnosno $f(c)-f(x)\ge 0$. Ako je $x\in(a,c)$, onda je

$c-x>0$, pa je $\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x}\geq 0$. Ako $x\in(c,b)$, onda je $c-x<0$, pa je $\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x}\leq 0$.

Na osnovu ovih zapažanja zaključujemo da je

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\geq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to c^+}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leq 0$$

Ako je funkcija diferencijabilna u tački *c* onda postoji granična vrednost

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

A kako postoji granična vrednost kad $x\to c$ onda postoje i leva i desna granična vrednost i one su jednake pa je

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=\lim_{x\to c^-}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=\lim_{x\to c^+}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=0$$

Dokaz je sličan i pri pretpostavci da funkcija dostiže svoju najmanju vrednost u tački *c*.

Lagranžova teorema. Neka je $f:A\to R, A\subseteq R$ funkcija i neka je interval $[a,b]\subset A$. Ako je funkcija *f* neprekidna na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b), tada postoji tačka $c\in(a,b)$ tako da važi

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

4.4. Monotonost funkcije

Definicija 2. Neka je $f:A\to R, A\subseteq R$ funkcija i neka je interval $[a,b]\subset A$. Funkcija *f* je na intervalu $[a,b]$

1) ***monotono rastuća*** ako važi $(\forall x,y\in[a,b])(x<y\Rightarrow f(x)<f(y))$

2) ***monotono neopadajuća*** ako važi $(\forall x,y\in[a,b])(x<y\Rightarrow f(x)\le f(y))$

3) ***monotono opadajuća*** ako važi $(\forall x,y\in[a,b])(x<y\Rightarrow f(x)>f(y))$

4) ***monotono nerastuća*** ako važi $(\forall x,y\in[a,b])(x<y\Rightarrow f(x)\ge f(y))$

5) ***ograničena odozgo*** ako postoji realan broj *M* takav da važi $(\forall x\in[a,b])\, f(x)\le M$

6) ***ograničen odozdo*** ako postoji realan broj *m* takav da važi $(\forall x\in[a,b])\, f(x)\ge m$.

Pomoću prvog izvoda, a na osnovu sledeće teoreme se lakše utvrđuje monotonost funkcije.

Teorema 1. Neka je $f:A\to R,\ A\subseteq R$ funkcija i neka je interval $[a,b]\subset A$. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Ako je $(\forall x\in(a,b))\, f'(x)>0$ onda je funkcija $f(x)$ monotono rastuća na intervalu $[a,b]$, a ako je $(\forall x\in(a,b))\, f'(x)<0$ onda je funkcija $f(x)$ monotono opadajuća na intervalu $[a,b]$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi $(\forall x\in(a,b))\, f'(x)>0$. Dokazaćemo da je funkcija $f(x)$ monotono rastuća na tom intervalu. Neka su $x,y\in(a,b)$ dve proizvoljne tačke iz intervala (a,b), takve da je $x<y$. Pošto je $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b) onda je ona i na intervalu (x,y) neprekidna i diferencijabilna pa prema Lagranžovoj teoremi postoji tačka $c\in[x,y]$ tako da važi

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)$$

Iz $x<y$ sledi da je $y-x>0$. Iz pretpostavke teoreme $(\forall x\in(a,b))\, f'(x)>0$ sledi da je i $f'(c)>0$. Kako je $(y-x)>0$ i $f'(c)>0$ onda je i njihov proizvod veći od nule $(y-x)f'(c)>0$. Odatle dobijamo da je $f(y)-f(x)>0$, odnosno

$f(x) < f(y)$ što po definiciji znači da je funkcija $f(x)$ monotono rastuća. Slično se dokazuje i da je funkcija monotono opadajuća.

4.5. *Ekstremne vrednosti funkcije*

Fermaova teorema daje potreban uslov za postojanje ekstremne vrednosti: ako funkcija u nekoj tački c ima lokalni minimum ili maksimum onda je $f'(c) = 0$. Međutim to nije i dovoljan uslov. Dovoljan uslov za postojanje lokalnog minimuma odnosno maksimuma daje sledeća teorema.

Teorema 2. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački x_0 i diferencijabilna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Ako je

(1) $((\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) > 0) \wedge ((\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) < 0)$ tada u tački x_0 funkcija ima lokalni maksimum $f(x_0)$.

a, ako je

(2) $((\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) < 0) \wedge ((\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) > 0)$ tada u tački x_0 funkcija ima lokalni minimum $f(x_0)$.

Moguće je da je u nekoj tački c prvi izvod $f'(c) = 0$, ali da prvi izvod ima isti znak i za manje i za veće vrednosti od c. U tom slučaju u tački c ne postoji ekstremna vrednost ali možda postoji prevojna tačka.

Dakle ako je u nekoj tački c, $f'(c) = 0$ i ako u toj tački funkcija menja monotonost onda u toj tački postoji ekstremna vrednost. Ako iz monotono rastuće prelazi u monotono opadajuću, onda u toj tački postoji lokalni maksimum, a ako iz monotono opadajuće prelazi u monotono rastuću, onda u toj tački postoji lokalni minimum.

Ekstremne vrednosti se mogu ispitivati i upotrebom viših izvoda, na koji način saznaćemo iz sledeće teoreme.

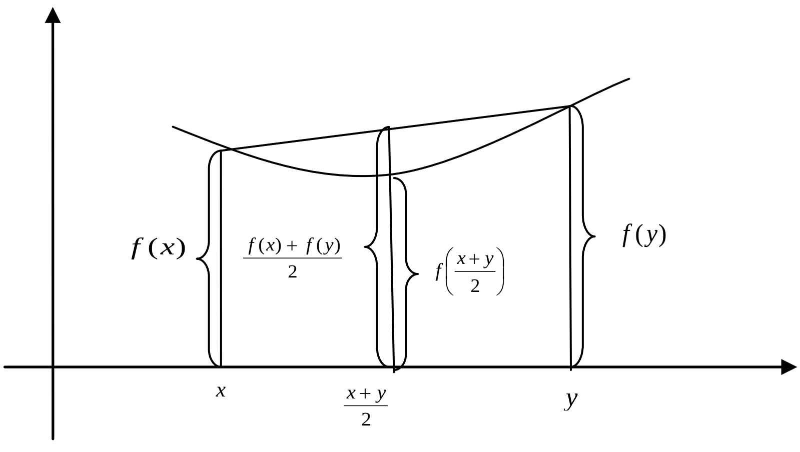
Teorema 3. Neka funkcija $f(x)$ ima neprekidni drugi izvod u okolini $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, tačke x_0 i neka je $f'(x_0)=0$.

(1) Ako je $f''(x_0)>0$, onda funkcija ima lokalni minimum $f(x_0)$ u tački x_0.

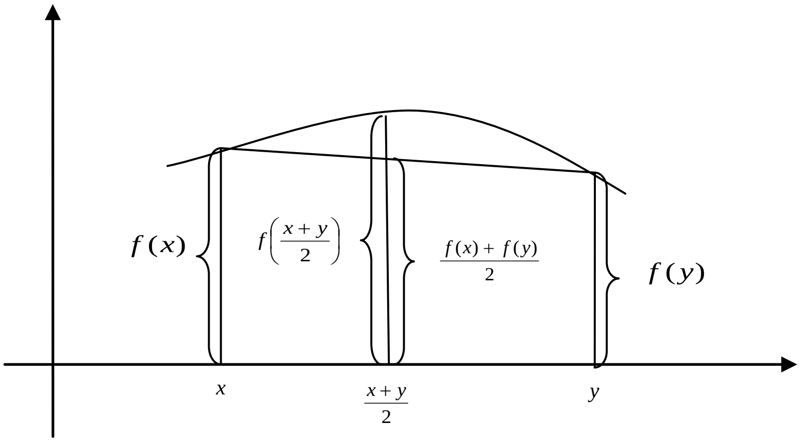
(2) Ako je $f''(x_0)<0$, onda funkcija ima lokalni maksimum $f(x_0)$ u tački x_0.

4.6. Konveksnost funkcije i prevojne tačke

Definicija 3. Neka je $f: A \to R, A \subseteq R$ funkcija i neka je interval $[a,b] \subset A$. Funkcija f je: (1) ***konveksna*** na intervalu $[a,b]$ ako važi $(\forall x, y \in [a,b])$ $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$; (2) ***konkavna*** na intervalu $[a,b]$ ako važi $(\forall x, y \in [a,b])$ $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$.



Konveksna funkcija



Konkavna funkcija

Ispitivanje konveksnosti i konkavnosti funkcije je mnogo jednostavnije na osnovu znaka drugog izvoda i zaključaka koje nudi sledeća teorema.

Teorema 4. Neka funkcija f ima neprekidan drugi izvod na intervalu $[a,b]$. Ako je

(1) $(\forall x \in [a,b])\, f''(x) > 0$, funkcija je konveksna na intervalu $[a,b]$,

(2) $(\forall x \in [a,b])\, f''(x) < 0$, funkcija je konkavna na intervalu $[a,b]$.

Definicija 4. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x_0 \in A$. Ako u x_0 funkcija menja konveksnost u konkavnost ili obrnuto, onda je tačka $P(x_0, f(x_0))$ ***prevojna tačka*** grafika.

Pitanja i zadaci

1. Kako glasi definicija lokalnog minimuma i lokalnog maksimuma?
2. Kad kažemo da je funkcija monotono rastuća, monotono neopadajuća, monotono opadajuća i monotono nerastuća na nekom intervalu?

3. Kako se određuje monotonost funkcije pomoću prvog izvoda?
4. Kako se određuju ekstremne vrednosti funkcije?
5. Kad kažemo da je funkcija konveksna, a kad konkavna na nekom intervalu?
6. Kako se određuje konveksnost i konkavnost pomoću drugog izvoda funkcije?
7. Kako se određuj prevojne tačke funkcije?
8. Ispitati monotonost, naći ekstremne vrednosti, ispitati konveksnost i konkavnost i naći prevojne tačke sledećih funkcija:

1) $y=\dfrac{6x-x^2-9}{x-2}$, **2)** $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$, **3)** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$, **4)** $y=\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}$,

5) $y=\dfrac{x^2-3x-10}{x+3}$, **6)** $y=\dfrac{x^2+4x-5}{x-3}$, **7)** $y=\dfrac{x^2+5x-6}{x-2}$,

8) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-2}$, **9)** $y=\dfrac{2x-x^2+3}{x+2}$, **10)** $y=\dfrac{5x-x^2-6}{x+1}$,

11) $y=\dfrac{x-x^2-2}{x-2}$, **12)** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, **13)** $y=\ln\dfrac{2x-1}{x+3}$, **14)** $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$,

15) $y=(x^2-1)e^x$, **16)** $y=\ln(x^2-1)$, **17)** $y=e^{\frac{x-2}{1-x}}$, **18)** $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{1-2x}}$,

19) $y=\sqrt{\dfrac{1+2x}{x+2}}$, **20)** $y=e^{\frac{1-x}{2x+1}}$, **21)** $y=e^{\frac{2-x^2}{1+x}}$, **22)** $y=e^{\frac{1+x^2}{1-x}}$,

23) $y=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$, **24)** $y=\dfrac{(x+1)^2}{\ln x}$.

4.7. Lopitalova pravila

Kad se prilikom određivanja graničnih vrednosti funkcije javi neki od neodređenih oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, jedan od načina za nalaženje granične vrednosti je primenom prvog izvoda. Sve teoreme koje ćemo ovde navesti poznate su kao Lopitalova pravila.

Teorema 1. Neka su funkcije f i g diferencijabilne u okolini $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tačke x_0 pri čemu je $g'(x_0)\neq 0$ i neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ onda je

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Primer1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$

Napomena. Lopitalovo pravilo se može primeniti i u sledećim slučajevima:

1) ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,

2) ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ i

3) ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$.

Napomena. Lopitalovo pravilo se može primeniti više puta. Ako su finkcije $f^{(n)}(x)$ i $g^{(n)}(x)$ za $i=1,2,\cdots,n$ diferencijabilne u okolini $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tačke x_0 onda je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$.

Lopitalovo pravilo se može primeniti više puta i kad je u pitanju neodređeni oblik $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Primer 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Prilikom izračunavanja graničnih vrednosti funkcija mogu se javiti i neodređeni oblici tipa $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty-\infty]$ koji se odgovarajućom transformacijom svode na oblik $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ ili $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ onda je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ ili

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Primer 3.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Primer 4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{3x^2}=1.$

Kad imamo funkciju oblika $f(x)^{g(x)}$, mogu se javiti neodređeni oblici tipa $\left[0^0\right], \left[\infty^0\right], \left[1^\infty\right]$. Tada se primenjuje sledeća transformacija

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to\infty} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\ln f(x)}.$$

Primer 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(\sin x)} = e^0 = 1$

zato što je

$$\lim_{x\to 0} x\ln(\sin x) = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

4.8. *Analiza toka funkcije*

Da bi mogli da nacrtamo grafik realne funkcije $y = f(x)$ potrebno je:

1. odrediti *oblast definisanosti* funkcije $Df = \left\{x \in R \middle| f(x) \in R\right\}$;
2. odrediti *nule funkcije* (presek sa *x* osom) i *presek sa y osom*;
   - rešavanjem jednačine $f(x) = 0$ dobijamo *x* koordinate preseka grafika funkcije sa *x* osom; ako je $f(x_0) = 0$ onda je tačka $N(x_0, 0)$, tačka preseka grafika funkcije sa *x* osom.
   - ako $0 \in Df$, onda je tačka $M(0, f(0))$ presek grafika funkcije sa *y*-osom;
3. odrediti *znak funkcije*; odrediti intervale na kojima je funkcija *f* pozitivna odnosno negativna;
4. ispitati *parnost funkcije*;
   - ako je $(\forall x \in A)(f(-x) = f(x))$ kažemo da je funkcija *f*(*x*) *parna*

- ako je $(\forall x \in A)(f(-x) = -f(x))$, kažemo da je funkcija *f*(*x*) *neparna*.

5. odrediti *asimptota funkcije*: vertikalne, horizontalne i kose;
   - ako $a \notin Df$ i ako je

     $$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

     onda je prava $x = a$ *vertikalna asimptota*;
   - ako je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ili $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, onda je prava $y = b$ *horizontalna asimptota;*
   - ako je $a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $\mathrm{b} = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$ onda je prava $y = ax + b$ *kosa asimptota*;

     ukoliko postoji horizontalna asimptota, onda ne postoji kosa i obrnuto.

6. odrediti *intervale monotonosti* i *ekstremne vrednosti*;
   - naći prvi izvod funkcije, f'
   - odrediti nule prvog izvoda i znak funkcije f'
   - odrediti znak prvog izvoda; na intervalu gde je prvi izvod pozitivan, $f'(x) > 0$, funkcija je *monotono rastuća*, na intervalu gde je prvi izvod negativan, $f'(x) < 0$, funkcija je *monotono opadajuća*
   - ako je $f'(c) = 0$ i za vrednosti manje od *c* funkcija je monotono opadajuća, a za vrednosti veće od *c* funkcija monotono rastuća onda funkcija u tački *c* ima *lokalni minimum* čije su koordinate $P_{\min}(c, f(c))$, a ako je za vrednosti manje od *c* funkcija je monotono rastuća, a za vrednosti veće od *c* funkcija monotono opadajuća onda funkcija u tački *c* ima *lokalni maksimum* čije su koordinate $P_{\max}(c, f(c))$.

7. odrediti *intervale konveksnosti* i *prevojne tačke*;
   - odrediti drugi izvod funkcije f'',
   - odrediti nule drugog izvoda funkcije

- odrediti znak drugog izvoda funkcije; na intervalu gde je drugi izvod pozitivan $f''(x) > 0$, funkcija je konveksna, a na intervalu gde je drugi izvod negativan $f''(x) < 0$, funkcija je konkavna;
- odrediti prevojne tačke funkcije; ako je $f''(x_0) = 0$ i u toj tački funkcija menja konveksnost (iz konveksne u konkavnu ili obrnuto) onda je $P(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka.

Na osnovu izvršene analize, može se skicirati grafik funkcije *f*(*x*).

Prime 1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$.

1) Oblast definisanosti: Kako deljenje nulom nije definisano, racioanlna funkcija nije definisana za one vrednosti za koje je izraz u imeniocu (ispod razlomačke crte) jednak nuli.

$x - 3 = 0$ za $x = 3$. Dakle $Df = \{x \in R | x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2) Nule funkcije i presek sa *y* osom. Vrednosti argumenta x za koje je funkcija jednaka nuli, nazivaju se nule funkcije (presek sa x osom). Racionalna funkcija je jednaka nuli za one vrednosti za koje je izraz u brojiocu (iznad razlomačke crte) jednak nuli. $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$. Izraz u brojiocu je kvadratna funkcija. Nule kvadratne funkcije se dobijaju rešavanjem kvadratne jednačine.

Opšti oblik kvadratne jednačine je $ax^2 + bx + c = 0$. Rešenja se dobijaju po sledećem obrascu $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac > 0$, jednačina ima dva rešenja, ako je $D = 0$, jednačina ima jedno rešenje, a ako je $D < 0$, jednačina nema rešenja.

U ovom primeru je $D = 16 + 20 = 36$, pa jednačina ima dva rešenja

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$. $x_1 = \dfrac{-4 + 6}{2} = 1$, a $x_2 = \dfrac{-4 - 6}{2} = -5$. To znači da ova funkcija ima dve nule, odnosno **dva preseka sa *x* osom $N_1(1, 0)$ i $N_2(-5, 0)$**.

Presek sa y osom se dobija kad se za vrednost argumenta x uzme nula i izračuna vrednost funkcije. $x=0 \Rightarrow y=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$. **Presek sa *y* osom je tačka *M*(0, 5/3)**.

3) Znak funkcije. Znak kvadratne funkcije $y=ax^2+bx+c$ zavisi od znaka konstante a i vrednosti determinante D.

Ako je $\boldsymbol{a>0}$ i $\boldsymbol{D>0}$, $y>0$ za $x\in(-\infty,x_1)\bigcup(x_2,+\infty)$, a $y<0$ za $x\in(x_1,x_2)$.

+ + + + + + + + + + - - - - - - - - - - - - - - + + + + + + + + + + + + +

$\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{x_2}$

Ako je $\boldsymbol{a>0}$ i $\boldsymbol{D=0}$**,** jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija je pozitivna za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.

+ +

$\boldsymbol{x_1 = x_2}$

Ako je $\boldsymbol{a>0}$ i $\boldsymbol{D<0}$**,** jednačina nema rešenje, pa kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ nema presek sa x osom i $y>0$ za svako x iz oblasti definisanosti.

Ako je $\boldsymbol{a<0}$ i $\boldsymbol{D>0}$, $y>0$ za $x\in(x_1,x_2)$, a $y<0$ za $x\in(-\infty,x_1)\bigcup(x_2,+\infty)$.

- - - - - - - - - - - - - - + + + + + + + + + + - - - - - - - - - - - - - - - -

$\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{x_2}$

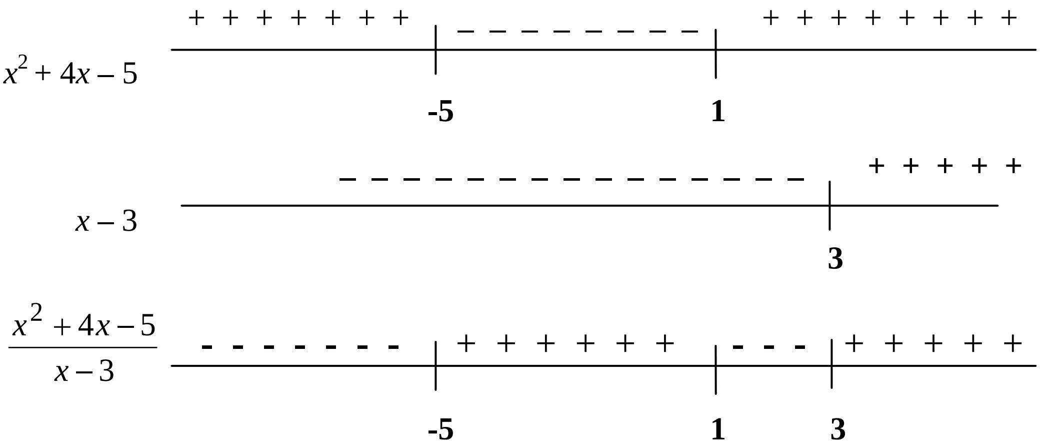
Ako je $\boldsymbol{a<0}$ i $\boldsymbol{D=0}$**,** jednačina ima samo jedno rešenje i kvadratna funkcija ima negativan znak za svako x iz oblasti definisanosti, osim za rešenje $x_1 = x_2$.

- -

$\boldsymbol{x_1 = x_2}$

Ako je $\boldsymbol{a<0}$ i $\boldsymbol{D<0}$**,** jednačina nema rešnje, pa kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ nema presek sa x osom i $y<0$ za svako x iz oblasti definisanosti.

U našem primeru znak određujemo na sledeći način:



Dakle $y > 0$ za $x \in (-5,1) \bigcup (3,+\infty)$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty,-5) \bigcup (1,3)$.

4) **Asimptote.**

Ako funkcija nije definisana u tački *a*, funkcija ima u toj tački **vertikalnu asimptotu** ukoliko važi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ i/ili $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

U našem slučaju funkcija nije definisana u $a = 3$. Ispitaćemo kakve vrednosti funkcija dobija u okolini te tačke.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+4x-5}{x-3} = \begin{pmatrix} x = 3+h \\ h > 0, h \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 + 4(3+h) - 5}{3+h-3} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2+12+4h-5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+10h+16}{h} = \frac{16}{0} = +\infty.$$

Za određivanje granične vrednosti upotrebili smo smenu $x = 3 + h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa desne strane funkcija teži $+\infty$.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+4x-5}{x-3} = \begin{pmatrix} x = 3-h \\ h > 0, h \to 0 \end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{(3-h)^2 + 4(3-h) - 5}{3-h-3} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{9-6h+h^2+12-4h-5}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2-10h+16}{-h} = \frac{16}{-0} = -\infty.$$

Sada smo upotrebili smenu $x = 3 - h$, gde je h mala pozitivna veličina koja teži nuli. Na osnovu dobijene granične vrednosti, zaključujemo da kad x teži ka 3 sa leve strane funkcija teži -∞. Dakle prava ***x* = 3 je vertikalna asimptota** funkcije i sa leve i sa desne strane grafika.

Ukoliko važi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ i/ili $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, onda je prava ***y* = *b*, horizontalna asimptota**.

Granična vrednost racionalne funkcije kad $x \to \infty$, određuje se na sledeči način:

Opšti oblik racionalne funkcije je $\dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$ **.**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n \left(a_0 + a_1 \overset{0}{\frac{1}{x}} + \cdots + a_{n-1} \overset{0}{\frac{1}{x^{n-1}}} + a_n \overset{0}{\frac{1}{x^n}} \right)}{x^m \left(b_0 + b_1 \underset{0}{\frac{1}{x}} + \cdots + b_{m-1} \underset{0}{\frac{1}{x^{m-1}}} + b_m \underset{0}{\frac{1}{x^m}} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n a_0}{x^m b_0} = \begin{cases} \infty, & n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

U našem primeru je $n = 2, m = 1$, pa je $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} = \infty$

što znači da vertikalna asimptota ne postoji. Vertikalna i kosa asimptota se uzajamno isključuju, ako postoji jedna ne postoji druga. U ovom primeru ne postoji horizontalna asimptota, pa ćemo ispitati da li postoji kosa asimptota.

Opšti obrazac za **kosu asimptotu je *y* = *ax* +*b***, gde je $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, a

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$.

U našem primeru je

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x(x - 3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 3x} = 1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-5}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-5-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x-5}{x-3}=7$$

pa je kosa asimptota $\boldsymbol{y = x + 7}$. Da bi nacrtali kosu asimptotu, dovoljne su nam bilo koje dve njene tačke. $y(0) = 7$, $y(-7) = 0$. Kosa asimptota prolazi kroz tačke $K_1(0, 7)$ i $K_2(-7, 0)$.

5) **Monotonost funkcije i ekstremne vrednosti.**

Da bi odredili ekstremne vrednosti i intervale monotonosti, potrebno je da nađemo prvi izvod funkcije i nule prvog izvoda.

Za nalaženje izvoda racionalne funkcije upotrebićemo formulu za izvod količnika.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. U našem slučaju je $u=x^2+4x-5$,

$v=x-3,\ u'=2x+4,\ v'=1$.

$$y'=\left(\frac{x^2+4x-5}{x-3}\right)'=\frac{(x^2+4x-5)'(x-3)-(x^2+4x-5)(x-3)'}{(x-3)^2}=$$

$$\frac{(2x+4)(x-3)-(x^2+4x-5)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x+4x-12-x^2-4x+5}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm 8}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{14}{2}=7,\ x_2=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow y'=\frac{(x-7)(x+1)}{(x-3)^2}$$

Dakle, nule prvog izvoda su $x_1 = 7$ i $x_2 = -1$. Sada treba odrediti znak prvog izvoda. Kako je u imeniocu funkcije y', izraz $(x-3)^2$ koji je pozitivan za svaki realan broj (zbog toga što je izraz na kvadrat), znak funkcije y' zavisi samo od znaka kvadratne funkcije u brojiocu $x^2-6x-7=(x-7)(x+1)$.

		-1		7	
x^2-6x-7	+ + + + + +		- - - - - - - - - -		+ + + + + + +
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$y' > 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (7, -\infty)$, pa je funkcija monotono rastuća na tim intervalima; $y' < 0$ za $x \in (-1, 7)$, pa je funkcija monotono opdajuća na tom intervalu. U tački $x = -1$, funkcija menja svoju monotonost, iz monotono rastuće prelazi u monotono opadajuću, pa u toj tački funkcija ima lokalni maksimum. U tački $x = 7$ iz monotono opadajuće, funkcija prelazi u monotono rastuću, pa u toj tački ima lokalni minimum. y koordinatu maksimuma dobijamo kad za vrednost argumenta u funkciji zamenimo $x = -1$.

$y_{\max} = y(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5}{-1-3} = \dfrac{-8}{-4} = 2$, $P_{max}(-1, 2)$ - koordinate maksimuma

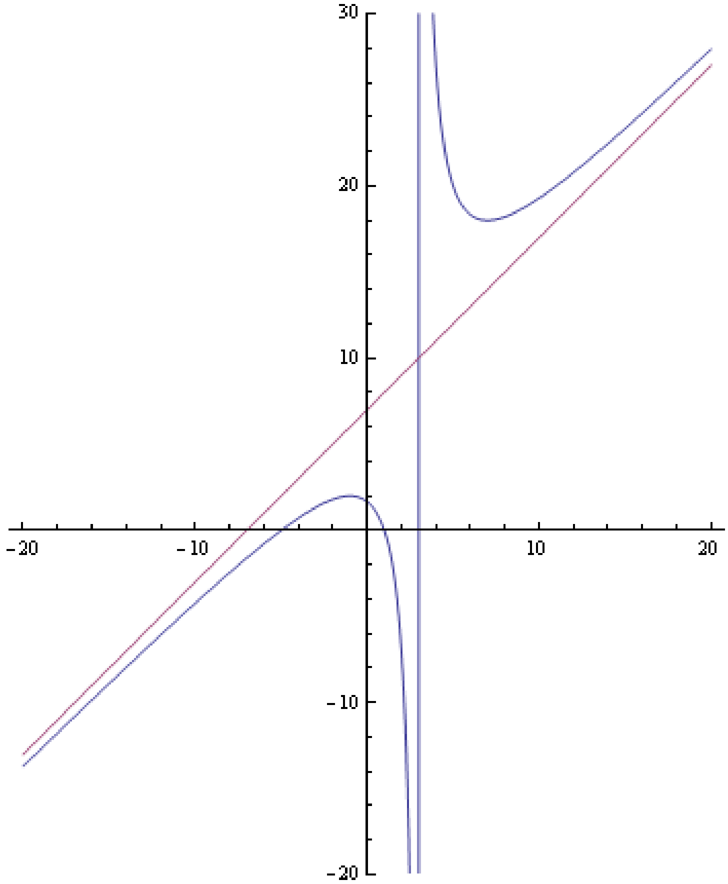
$y_{\min} = y(7) = \dfrac{7^2 + 4 \cdot 7 - 5}{7-3} = \dfrac{72}{4} = 18$, $P_{min}(7, 18)$ – koordinate minimuma

7) konveksnost, konkavnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{32}{(x-3)^3}$; drugi izvod funkcije nema nule, pa funkcija nema prevojne tačke; funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 3)$, konveksna za $x \in (3, +\infty)$

− − − − − − − − − − − − − − − −   + + + + + +

$(x-3)^3$

3



Primer2. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+3)^2}$,

1) oblast definisanosti $(-\infty,-3) \cup (-3,+\infty)$;

2) nule funkcije $N_1(-2,0)$, $N_2(1,0)$; presek grafika funkcije sa y-osom $M(0,-2/9)$;

3) znak funkcije za $x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$, $y > 0$, a za $x \in (-2,1)$, $y < 0$;

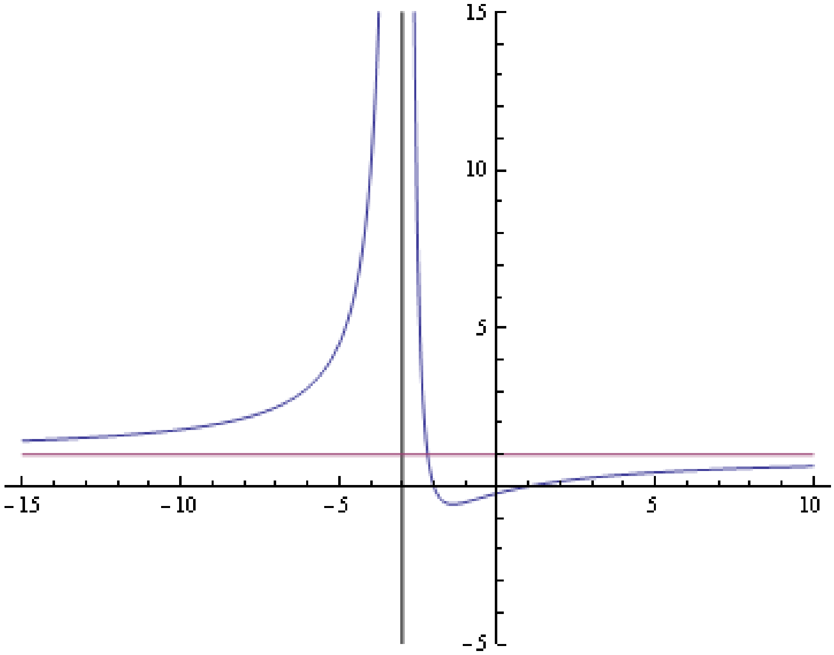
4) asimptote: vertikalna asimptota $x = -3$; horizomtalna asimptota $y = 1$;

5) monotonost i ekstremne vrednosti $y' = \dfrac{5x+7}{(x+3)^3}$;

za $x \in (-\infty,-3) \cup (-7/5,+\infty)$ funkcija je monotono rastuća, a za $x \in (-3,-7/5)$,

funkcija je monotono opadajuća; funkcija ima minimum u tački $P_{min}(-7/5,-9/16)$;

6) konveksnost i prevojne tačke $y'' = \dfrac{-2(5x+3)}{(x+3)^4}$, funkcija je konveksna za $x \in (-\infty,-3/5)$, konkavna za $x \in (-3/5,+\infty)$ i ima prevojnu tačku P(-3/5,-17/8).



Zadaci

Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije :

1) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$, 2) $y=\frac{2x^3}{(x-2)^2}$, 3) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$, 4) $y=\frac{x^3}{x^2+12}$, 5) $y=\frac{(1-x)^3}{2x^2}$,

6) $y=\frac{(x-2)^3}{3(x+2)^2}$, 7) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$, 8) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$, 9) $y=\frac{6x-x^2-9}{x-2}$,

10) $y=\frac{3x-x^2}{x-4}$, 11) $y=\frac{x^2+3x}{x+4}$, 12) $y=\frac{x^2+4x-4}{x-1}$, 13) $y=\frac{x^2-3x-10}{x+3}$,

14) $y=\frac{x^2+4x-5}{x-3}$, 15) $y=\frac{x^2+5x-6}{x-2}$, 16) $y=\frac{-x^2-x+2}{x-2}$,

17) $y=\frac{2x-x^2+3}{x+2}$, 18) $y=\frac{5x-x^2-6}{x+1}$, 19) $y=\frac{x-x^2-2}{x-2}$, 20) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$,

21) $y=\frac{x^2-4}{1-x^2}$, 22) $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$, 23) $y=\frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$, 24) $y=\frac{x^2+3x}{(x+4)^2}$,

25) $y=\frac{2x^2-1}{(x-1)^2}$, 26) $y=\frac{x^2+3x}{(x+1)^2}$, 27) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, 28) $y=\frac{x^2-2}{(x-2)^2}$,

29) $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, 30) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$, 31) $y=\frac{x^2-1}{5x^2+3x}$, 32) $y=\frac{x^2}{x^2-3}$,

33) $y=\frac{x^2-2}{(x-2)^2}$, 34) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$, 35) $y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$ 36) $y=\frac{x-2}{x^2-2x-3}$,

37) $y=\frac{x+3}{x^2+x+3}$, 38) $y=\frac{5-x}{9-x^2}$, 39) $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$, 40) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

4.9. *Diferencijal funkcije*

Neka je $y = f(x)$, $f : A \to R, A \subseteq R$, funkcija i neka je $x \in A$ proizvoljna tačka u kojoj je funkcija f diferencijabilna. Tada postoji granična vrednost

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

i ona je konačna. Označimo sa α razliku $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y'$.

Tada važi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

Priraštaj funkcije možemo izraziti u obliku $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Kad $\Delta x \to 0$, onda i $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \to 0$ kao proizvod dve beskonačno male veličine. Prema tome $y' \cdot \Delta x$ je glavna vrednost priraštaja funkcije, i ona se naziva ***diferencijal prvog reda funkcije*** i obeležava se sa $df(x)$ ili dy. Znači diferencijal funkcije je

$$dy = df(x) = y' \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x .$$

Ako za funkciju $f(x)$ uzmemo $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, pa dobijamo $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x$. Dakle $dx = \Delta x$, pa ćemo nadalje zapisivati

$$dy = y'dx \text{ ili } df(x) = f'(x)dx$$

Odatle je $y' = \dfrac{dy}{dx}$, što predstavlja vezu između prvog izvoda funkcije i diferencijala prvog reda funkcije.

Pravila za izračunavanje diferencijala funkcije

Neka su funkcije $u = f(x)$, i $v = g(x)$ diferencijabilne u tački $x \in A$. Onda se na osnovu definicije diferencijala funkcije i teoreme o pravilima diferenciranja mogu dokazati sledeća pravila za izračunavanje diferencijala funkcije:

(1) $d(au+bv)=adu+bdv,\ \ a,b\in R$,

(2) $d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$,

(3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2},\ \ v\neq 0$.

Diferencijal drugog reda definiše se kao $d^2 f(x) \overset{\text{def}}{=} f''(x)(dx)^2$, a ***diferencijal n-tog reda*** definiše se kao $d^n f(x) \overset{\text{def}}{=} f^{(n)}(x)(dx)^n$.

$(dx)^n$ ćemo zapisivati kao dx^n, pa ako umesto $f(x)$ koristimo y dobijamo

$d^n y = y^{(n)}dx^n \Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Primer. Odrediti diferencijal sledečih funkcija

1) $y=\sin x$, 2) $y=x^2-2x+1$, 3) $y=\cos(2x+2)$, 4) $y=x\ln x$

1) $y=\sin x$,

$dy=y'dx=\cos x dx$

2) $y=x^2-2x+1$,

$dy=(2x-2)dx=2(x-1)dx$

3) $y=\cos(2x+2)$

$dy=-2\sin(2x+2)dx$

4) $y=x\ln x$

$dy=(x\ln x)'dx=xd(\ln x)+\ln x dx=x\dfrac{1}{x}dx+\ln x dx=dx+\ln x dx=(1+\ln x)dx$

5. NEODREĐENI INTEGRAL

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na $(a,b) \subseteq R$. Diferenciranjem date funkcije f dobija se izvodna funkcija $f'(x)$. Može se postaviti pitanje da li za datu funkciju f postoji funkcija $F(x)$ takva da je $(\forall x \in (a,b))\, F'(x) = f(x)$.

Primer 1. Za $f(x) = x^2$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ jer je $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$.

Definicija 1. Neka je funkcija f definisana na $(a,b) \subseteq R$. Funkcija $F(x)$ je ***primitivna funkcija*** za funkciju f na intervalu (a, b) ako važi $(\forall x \in (a,b))\, F'(x) = f(x)$.

Teorema 1. Ako je funkcija $F(x)$ primitivna za funkciju f na intervalu $(a,b) \subseteq R$, tada je i funkcija $F(x) + C$, gde je funkcija C proizvoljna konstanta, takođe primitivna funkcija za funkciju $f(x)$.

Dokaz. Iz pretpostavke da je funkcija $F(x)$ primitivna za funkciju f na intervalu $(a,b) \subseteq R$, važi $(\forall x \in (a,b))\, F'(x) = f(x)$.
Onda važi $(\forall x \in (a,b))\, (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$, pa je i $F(x) + C$ primitivna funkcija za $f(x)$.

Ako za datu funkciju $f(x)$ postoji primitivna funkcija $F(x)$, onda za $f(x)$ postoji beskonačno mnogo primitivnih funkcija koje se od $F(x)$ razlikuju za konstantu.

Definicija 2. Proizvoljnu primitivnu funkciju za datu funkciju f na intervalu (a,b) nazivamo ***neodređeni integral*** funkcije f i zapisujermo $\int f(x)dx = F(x) + C$.
$f(x)$ se naziva ***podintegralna funkcija***, a $f(x)dx$ je ***podintegralni izraz***.

Primer 1 . Dokazati da je $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $Df = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

$(\forall x \in (-\infty,0))(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, a

$(\forall x \in (0,+\infty))(\ln|x|)' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

pa je $\{\ln|x| + C\}$ skup primitivnih funkcija za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$.

Osobine neodređenog integrala

Teorema 2. Izvod neodređenog integrala je podintegralna funkcija.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Dokaz.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Teorema 3. Diferencijal neodređenog integrala je podintegralni izraz.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Dokaz.

$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$ jer je $dy = y'dx$.

Teorema 4. Neodređeni integral diferencijala funkcije $F(x)$ jednak je $F(x) + C$.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Dokaz.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Teorema 5. (Osnovna pravila integracije) Neka postoje $\int f(x)dx, \int g(x)dx$ i neka je $\lambda \neq 0$ realna konstanta. Tada važe jednakosti

1) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$; 2) $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Tablica integrala

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \in R, a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \in R, a \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Neki integrali se mogu, transformacijom podintegralne funkcije, svesti na tablične integrale, kao u sledećim primerima:

1) $\int (2x^2 + 9x - 5)dx = \int 2x^2 dx + \int 9x - \int 5dx = 2\int x^2 dx + 9\int x - 5\int dx =$

$$= 2\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} - 5x + C$$

2) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 2\int x + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + \ln x + C =$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C$$

3) $\int (2\sqrt{x}-e^x)dx = \int 2\sqrt{x}dx - \int e^x dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - e^x = 2\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - e^x + C =$

$= 2\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - e^x + C == \dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} - e^x + C$

4) $\int \dfrac{x^2+2}{x^2+1}dx = \int \dfrac{x^2+1+1}{x^2+1}dx = \int\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$= \int dx + \int \dfrac{1}{x^2+1}dx = = x + arctgx + C$

5) $\int tg^2 x dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx =$

$= tgx - x + C$

6) $\int \dfrac{dx}{2x^2+9} = \int \dfrac{dx}{2\left(x^2+\frac{9}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}arctg\dfrac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{3}arctg\dfrac{\sqrt{2}}{3}x + C$

5.1. Integracija pomoću smene

Često se kao podintegralna funkcija javlja složena funkcija za koju primitivnu funkciju ne možemo naći direktno u tablici integrala. U tom slučaju primenjujemo metod smene kako bi integral složene funkcije sveli na tablični integral.
Neka je podintegralna funkcija oblika $f(\varphi(x))$. Da bi našli integral ovakve funkcije $\int f(\varphi(x))dx$ treba uraditi sledeće:

1) uvesti smenu $t=\varphi(x)$; odatle je $x=\varphi^{-1}(t)$;

2) diferenciranjem leve i desne strane dobijamo $dx = \left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt$, pa integral $\int f(\varphi(x))dx$ dobija oblik $\int f(t)\left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt$, koji bi trebalo da se relativno lako rešava primenom tablice;
3) u dobijenoj primitivnoj funkciji $F(t)$ zamenjujemo t sa $\varphi(x)$.

***Primer* 1.** $\int \sin 2x dx$, u ovom primeru je

$f(x) = \sin x,\ \varphi(x) = 2x,\ f(\varphi(x)) = f(2x) = \sin 2x$

$$\int \sin 2x dx = \begin{pmatrix} t = 2x \\ x = \frac{t}{2}, dx = \frac{dt}{2} \end{pmatrix} = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t) + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Smena može biti i oblika $g(t) = \varphi(x)$ što ćemo videti u sledećem primeru.

***Primer* 2.**

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \begin{pmatrix} t^2 = x^2 - 4 \\ 2tdt = 2xdx \end{pmatrix} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{tdt}{t} = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{x^2 - 4} + C$$

Ako je podintegralna funkcija oblika $f(ax+b)$, gde je $\int f(x)dx$ tablični integral, onda primenjujemo sledeću smenu

$$\int f(ax+b)dx = \begin{pmatrix} t = ax + b \\ dt = adx \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{pmatrix} = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt.$$

Na ovaj način se integral svodi na tablični integral.

***Primer* 3.** $\int (3x+2)^5 dx$ Ovaj integral je najsličniji tabličnom integralu

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ Zato ćemo upotrebiti smenu $t = 3x + 2$.

$$\int (3x+2)^5\,dx = \begin{pmatrix} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{pmatrix} = \int t\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int tdt = \frac{1}{3}\frac{t^2}{2} + C = \frac{t^2}{6} + C = \frac{(3x+2)^2}{6} + C$$

Primer4.

$$\int \sin(3x+4)dx = \begin{pmatrix} t = 3x+4 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{pmatrix} = \int \sin t\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin tdt = \frac{1}{3}(-\cos t) + C =$$

$$-\frac{1}{3}\cos(3x+4) + C$$

Primer5.

$$\int \frac{1}{6-7x}dx = \begin{pmatrix} t = 6-7x \\ dt = -7dx \\ dx = \frac{-1}{7}dt \end{pmatrix} = \int \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{7}\right)dt = -\frac{1}{7}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{7}ln|t| + C = -\frac{1}{7}ln|6-7x| + C$$

Primer6.

$$\int \frac{1}{1+4x^2}dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}dx \begin{pmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctg2x + C$$

Primer 7.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{9}{4}x^2\right)}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{\left(1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2\right)}}dx = \begin{pmatrix} t = \frac{3}{2}x \\ dt = \frac{3}{2}dx \\ dx = \frac{2}{3}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$\frac{1}{3}arcsin\,t + C = \frac{1}{2}arcsin\frac{3}{2}x + C$$

Ako su podintegralne funkcije oblika $f(x)\cdot f'(x)$ ili $\frac{f'(x)}{f(x)}$, uvodi se smena

$$\begin{pmatrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{pmatrix}$$

Primer 8.

$$\int sin\,x\,cos^2 x dx = \begin{pmatrix} t = cos\,x \\ dt = sin\,x dx \end{pmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{cos^3 x}{3} + C$$

Primer 9.

$$\int x\cos(x^2+1)xdx = \begin{pmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$$

Primer 10.

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{pmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{pmatrix} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos t) + C$$

Integrali u kojima u podintegralnoj funkciji javlja kvadratna funkcija ax^2+bx+c

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\ \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\ \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$
$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

Kvadratnu funkciju svodimo na kanonični oblik

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

i primenjujemo smenu $t = x + \frac{b}{2a} \Rightarrow dt = dx$.

Kod integrala oblika $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, smenom $t = x + \frac{b}{2a}$ dobijamo neki od tabličnih integral oblika $\int \frac{dt}{t^2+p^2}$, $\int \frac{dt}{t^2-p^2}$ ili $\int \frac{dt}{t^2}$.

Primer 11.

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \begin{pmatrix} t = x - \frac{5}{2} \\ dt = dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

Kod integrala oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, smenom $t = x + \frac{b}{2a}$ dobijamo neki od tabličnih integral oblika $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm p^2}}$, $\int \frac{dt}{\sqrt{p^2-t^2}}$ ili $\int \frac{dt}{t}$.

Primer 12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]}} = \begin{pmatrix} t = x + \frac{1}{4} \\ dt = dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t + \sqrt{t^2+\frac{7}{16}}\right| + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right| + C$$

5.2. Parcijalna integracija

Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ funkcije. Znamo da je $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Integracijom leve i desne strane dobijamo $\int (u \cdot v)' dx = \int (u'v + uv')dx$. Na osnovu teoreme 4 $\int (u \cdot v)' dx = \int d(u \cdot v) = u \cdot v + C$, pa dobijamo $\int (u'v + uv')dx = u \cdot v + C$.

Primenom teoreme 5 $\int (u'v + uv')dx = \int u'vdx + \int uv'dx = \int vdu + \int udv$, jer je $du = u'dx, dv = v'dx$. Na osnovu toga dobijamo $\int vdu + \int udv = u \cdot v + C$. Odatle dobijamo formulu za parcijalnu integraciju

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu + C .$$

Kod podintegralne funkcije za u biramo množitelj koji je pogodan za diferenciranje, a ono što je ostalo zajedno sa dx čini dv i treba da bude pogodno za nalaženje integrala.

***Primer* 1.**

$$\int xe^x dx = \begin{pmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x \end{pmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

***Primer* 2.**

Kod integrala $\int x^2 \ln x \, dx$, lakše je uzeti za u = *lnx* jer je izvod funkcije *lnx* tablični izvod, dok se integral ove funkcije teže određuje.

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix} = (\ln x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

Primer 3. U slučaju integrala $\int \ln x \, dx$ opet uzimamo za u = *lnx*, a za *dv* ostaje *dx*.

$$\int \ln x \, dx = \begin{pmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = \int dx = x \end{pmatrix} = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Primer 4. Kod nekih integrala potrebno primeniti parcijalnu integraciju više puta kako bi se došlo do rešenja.

$$\int x^2 sinx\, dx = \begin{pmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \sin xdx, v = \int \sin xdx = -\cos x \end{pmatrix} = x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2xdx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos xdx = \begin{pmatrix} u_1 = x, du_1 = dx \\ dv_1 = \cos xdx, v_1 = \int \cos xdx = \sin x \end{pmatrix} =$$

$$-x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin dx\right) = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - (-\cos x)\right) + C =$$

$$-x^2 \cos x + 2\sin x + 2\cos x + C$$

Primer 5.

$$\int e^x \text{sinx}\, dx = \begin{pmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin xdx, v = \int \sin xdx = -\cos x \end{pmatrix} = e^x(-\cos x) - \int -\cos xe^x dx =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx = \begin{pmatrix} u_1 = e^x, du_1 = e^x dx \\ dv_1 = \cos x, v_1 = \int \cos xdx = \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$$

U ovom primeru smo nakon dva puta primenjene parcijalne integracije opet dobili polazni integral. Da bismo došli do rešenja obeležićemo ovaj integral sa $I = \int e^x \sin xdx$, pa do rešenja dolazimo rešavanjem jednačine

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$I = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

$$\int e^x \sin xdx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

5.3. Integracija racionalnih funkcija

Definicija 3. Neka su $q_m(x)$ i $p_n(x)$ realni polinomi i neka je stepen polinoma $p_n(x)$ različit od nule. Funkcija definisana formulom

$$f(x)=\frac{q_m(x)}{p_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n} \tag{1}$$

gde su $a_i,\, i=1,...,m,\ b_j,\ j=1,...,n$ realni brojevi, naziva se ***racionalna funkcija***.

Ako je stepen polinoma $q_m(x)$ manji od stepena polinoma $p_n(x)$ ($m<n$), onda se funkcija naziva ***prava racionalna funkcija***, u suprotnom je ***neprava racionalna funkcija***.

Ako je racionalna funkcija zadata formulom (1) neprava racionalna funkcija, onda postoje polinomi $s_{m-n}(x)$ i $r_k(x), k<n$, tako da se f na jedinstveni način može zapisati u obliku

$$f(x)=s_{m-n}(x)+\frac{r_k(x)}{p_n(x)}.$$

Polinom $s_{m-n}(x)$ dobija se deljenjem polinoma $q_m(x)$ polinomom $p_n(x)$, a $r_k(x)$ je ostatatak deljenja.

Integracijom leve i desne strane dobijamo $\int f(x)dx=\int s_{m-n}(x)dx+\int\frac{r_k(x)}{p_n(x)}dx$.

Polinom $p_n(x)$ se na osnovu teoreme o faktorizaciji može zapisati u obliku

$$p_n(x)=b_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+c_1x+d_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+c_tx+d_t)^{\beta_t}$$

gde je $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l+2(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_t)=n$ i $c_i^2-4d_i<0, i=\overline{1,r}$

Faktoru $(x-x_i)^{\alpha_i}$, $i=\overline{1,k}$, odgovara zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\cdots\frac{A_{\alpha_i}}{(x-x_i)^{\alpha_i}} \tag{2}$$

a faktoru $(x^2+c_jx+d_j)^{\beta_j}$ odgovara zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+c_jx+d_j}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+c_jx+d_j)^2}+\cdots+\frac{B_{\beta_j}x+C_{\beta_j}}{(x^2+c_jx+d_j)^{\beta_j}}\quad . \tag{3}$$

Dakle pravu racionalnu funkciju $\frac{r_k(x)}{p_n(x)}$ možemo rastaviti kao zbir parcijalnih razlomaka, pa se integral $\int \frac{r_k(x)}{p_n(x)}dx$ svodi na zbir intagrala parcijalnih razlomaka oblika $\int \frac{A_t}{(x-x_i)^t}dx$ i $\int \frac{B_s x + C_s}{(x^2+c_j x + d_j)^s}dx$ koji se dalje mogu rešavati metodom smene.

Primer 1.

$$I = \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$$

Faktoru $(x-1)^2$ odgovaraju parcijalni razlomci $\frac{A}{x-1}$ i $\frac{B}{(x-1)^2}$, a faktoru $(x+2)$ odgovara parcijalni razlomak $\frac{C}{x+2}$.

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$\frac{Ax^2+2Ax-Ax-2A+Bx+2B+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{x^2(A+C)+x(A+B-2C)-2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{x^2(A+C)+x(A+B-2C)-2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$$

Izjednačavanjem leve i desne strane gornje jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{l} A+C=1 \Rightarrow A=1-C \\ A+B-2C=1 \\ \underline{-2A+2B+C=1} \\ A=1-C \\ 1-C+B-2C=1 \\ \underline{-2(1-C)+2B+C=1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=1-C \\ B-3C=0 \\ \underline{2B+3C=3} \\ A=1-C \\ \underline{\Rightarrow B=1, C=\frac{1}{3}, A=\frac{2}{3}} \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}$$

$$I=\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\begin{pmatrix}t=x-1\\ dt=dx\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{3}\ln|t|-\frac{1}{t}=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=\begin{pmatrix}t=x+2\\ dt=dx\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|=\frac{1}{3}\ln|x+2|$$

$$I=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$$

Primer 2 . $\int\frac{x^5+2}{x^3-1}dx$

Podintegralna funkcija $\frac{x^5+2}{x^3-1}$ nije prava racionalna funkcija, pa ćemo polinom u brojiocu podeliti polinomom u imeniocu.

$$(x^5+2):(x^3-1)=x^2$$
$$\underline{x^5-x^2}$$
$$x^2+2$$

Deljenjem polinoma smo nepravu raciomalnu funkciju sveli na zbir polinoma i prave racionalne funkcije $\frac{x^5+2}{x^3-1}=x^2+\frac{x^2+2}{x^3-1}$

$$\int\frac{x^5+2}{x^3-1}dx=\int\left(x^2+\frac{x^2+2}{x^3+1}\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{x^2+2}{x^3+1}dx=\frac{x^3}{3}+I_1$$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, jednačina $x^2+x+1=0$ nema realna rešenja pa se polinom $x^2+x+1=0$ ne može dalje rastavljati na faktore. Faktoru $x-1$ odgovara parcijalni razlomak $\frac{A}{x-1}$, a faktoru x^2+x+1, parcijalni razlomak $\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$. Sada treba odrediti vrednosti koeficijenata *A*, *B* i *C*.

$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{x^2(A+B)+x(A-B)+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Izjednačavanjem leve i desne strane gornje jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$A+B=1\Rightarrow B=1-A$$
$$A-B+C=0$$
$$\underline{A-C=2\Rightarrow} C=A-2$$
$$\underline{A-(1-A)-(A-2)=2\Leftrightarrow A=1, B=0, C=-1}$$

$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{0\cdot x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$I_1=\int\frac{x^2+2}{x^3-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$\int\frac{1}{x-1}dx=\begin{pmatrix}t=x-1\\ dt=dx\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|x-1|$$

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\begin{pmatrix}t=x+\frac{1}{2}\\ dt=dx\end{pmatrix}=\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=$$
$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$I_1=\ln|x-1|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{x^5+2}{x^3-1}dx=\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Primer 3. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, jednačina $x^2-x+1=0$ nema realna rešenja pa se polinom x^2-x+1 ne može dalje rastavljati na faktore.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(B+C-A)+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Iz jednakosti $\frac{1}{x^3+1}=\frac{x^2(A+B)+x(B+C-A)+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$ se određuje vrednost konstanti A, B i C formiramo sistem jednačina

$$A+B=0$$
$$B+C-A=0$$
$$\underline{A+C=1}$$

Ovo je sistem od tri jednačine sa tri nepoznate koji možemo rešiti metodom smene. Iz prve jednačine izrazimo $B=-A$, iz treće $C=1-A$. Tako izražene B i C zamenimo u drugoj jednačini i dobijamo $-A+1-A-A=0$. Odatle je

$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$, pa je

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x^2-x+1)}dx$$

$$\int\frac{dx}{x+1}=\begin{pmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|x+1|$$

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}arctg\frac{4x}{3}$$

, pa je $\int\frac{dx}{x^3+1}=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-2arctg\frac{4x}{3}+C$.

Pitanja i zadaci

1. Navedi definiciju primitivne funkcije.
2. Navedi definiciju neodređenog integrala. Šta je podintegralna funkcija, a šta podintegralni izraz?
3. Navedi osobine neodređenog integrala.
4. Navedi osnovna pravila integracije.
5. Objasni metod integracije pomoći smene.
6. Objasni parcijalnu integraciju.
7. Objasni integraciju racionalnih funkcija.

Izračunaj:

1. 1) $\int \frac{dx}{2x-3}$, 2) $\int \sin(3x-2)dx$, 3) $\int e^{5x-1}dx$, 4) $\int (3x+2)^5 dx$,

   5) $\int \cos(4x-5)dx$, 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$, 7) $\int \frac{dx}{4x+1}$, 8) $\int (7x-3)^6 dx$.

2. *a*) $\int xe^{x^2}dx$, *b*) $\int x^2 e^{x^3+2}dx$, *c*) $\int \frac{dx}{2x-3}$, *d*) $\int \frac{\ln x}{x}dx$, *e*) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$,

   f) $\int \frac{dx}{5x+4}$, *g*), $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-4}}$, *h*) $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$, *i*) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-8x}}$.,

   j) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$, *k*) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$, *l*) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$, *m*) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin x}}dx$,

   n) $\int \frac{3x+4}{x^2-x+3}dx$

3. *a*) $\int x\cos xdx$, *b*) $\int x^3 \ln xdx$, *c*) $\int e^x \sin xdx$, *d*) $\int \ln xdx$, *f*) $\int x\ln^2 xdx$,

   g) $\int x^2 \sin xdx$, *h*) , *i*) $\int e^{-x}\sin xdx$, *j*) $\int 3^x \cos xdx$, *k*) $\int \cos(\ln x)dx$,

   l) $\int \sin(\ln x)dx$.

4. *1)* $\int \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2)}dx$, *2)* $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$, *3)* $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

4) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$, *5)* $\int \frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2+3x+2}dx$, *6)* $\int \frac{dx}{2x^2-5x+3}$,

7) $\int \frac{x+3}{x^2+4x-5}dx$, *8)* $\int \frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2}dx$, *9)* $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$,

10) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx$, *11)* $\int \frac{dx}{x^3-1}$, *12)* $\int \frac{x^4-3x+1}{x^3+x^2+x}dx$,

13) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-6x}dx$, 14) $\int \frac{dx}{x^4-1}$, 15) $\int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx$,

16) $\int \frac{x^2-x-6}{(x-1)(x^2+2x+3)}dx$, 17) $\int \frac{4x^2+3x-3}{(x-2)(x^2+x+1)}dx$,

18) $\int \frac{4x^2-x-4}{x^3-2x^2+x-2}dx$, 19) $\int \frac{10}{-x^3+3x^2-x+3}dx$.

6. ODREĐENI INTEGRAL

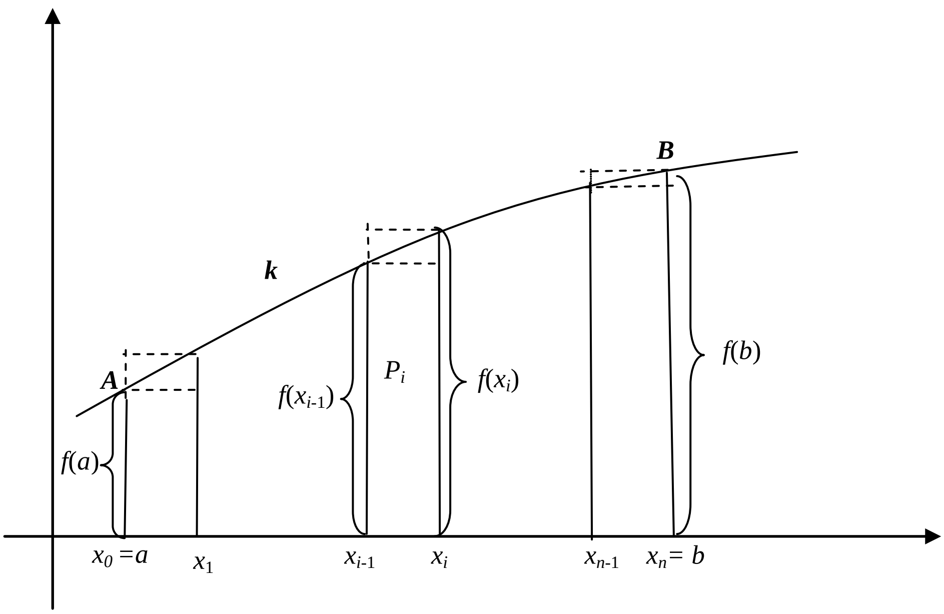
Neka je $f : A \to R, A \subseteq R$ funkcija za koju na zatvorenom intervalu $[a,b] \subset A$ važi

(1) f je neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$,

(2) $(\forall x \in [a,b]) f(x) \geq 0$,

(3) f je monotono rastuća na $[a,b]$.

Pretpostavimo da je $[a,b] \subset R^+$ i da se grafik funkcije *f*, kriva *k*, nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema.



Posmatramo krivolinijski trapez čije su stranice interval $[a,b]$, *f*(*a*), *f*(*b*) i luk iznad intervala $[a,b]$. Označimo sa *P* površinu tog krivolinijskog trapeza. Da bismo izračunali površinu tog trapeza, podelićemo interval $[a,b]$ na n podintervala tačkama $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, tako da su dužine podintervala $[x_1, x_2], \cdots [x_{n-1}, x_n]$ iste dužine Δx.

Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, ona je neprekidna i na svakom od podintervala $[x_{i-1},x_i]\subset[a,b], i=1,\dots,n$ pa prema teoremi 5 (neprekidnost funkcije) ona dostiže svoj minimum m_i i svoj maksimum M_i na svakom od podintervala $[x_{i-1},x_i],\ i=1,\dots,n$.

Na osnovu pretpostavke da je funkcija monotono rastuća sledi da je $m_i = f(x_{i-1})$ i $M_i = f(x_i),\ i=1,2,\cdots,n$. Ako sa P_i označimo površine krivolinijskih trapeza ograničenih intervalom $[x_{i-1},x_i]$, dužima $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ i delom krive iznad intervala $[x_{i-1},x_i]$, onda važi

$$m_i\cdot\Delta x\le P_i\le M_i\cdot\Delta x,\ i=1,\dots,n$$

Sumiranjem svih tih površina dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x\le\sum_{i=1}^{n} P_i\le\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$$

Kako je $P=\sum_{i=1}^{n}P_i$, dobijamo $\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x\le P\le\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x-\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x-\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x=$$

$$=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x-\left(f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\Delta x\right)=$$

$$=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x-f(x_0)\Delta x-f(x_1)\cdot\Delta x-\cdots-f(x_{n-1})\cdot\Delta x=$$

$$=f(x_n)\cdot\Delta x-f(x_0)\cdot\Delta x=\left(f(x_n)-f(x_0)\right)\cdot\Delta x=\left(f(b)-f(a)\right)\cdot\Delta x$$

Ako broj podintervala teži beskonačnosti $n\to\infty$, onda dužina intervala teži nuli $\Delta x\to 0$ pa dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x-\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x\right)=\left(f(b)-f(a)\right)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

odakle sledi da je

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Definicija 1. Određeni integral neprekidne realne funkcije f nad intervalom $[a,b]\subset A$ je granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x$$

ako ona postoji i jeste konačna i zapisujemo

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{(čitamo integral od } a \text{ do } b \text{ od } f(x)dx\text{)}$$

a – donja granica, b – gornja granica, $[a,b]$ - oblast integracije.

Na osnovu prethodne definicije i relacije (1), geometrijsko značenje određenog integrala u granicama od a do b neprekidne i pozitivne funkcije f je površina zatvorene oblasti *abBA*, tj.

$$P=\int_a^b f(x)dx \text{ ako je } f(x)\geq 0 \text{ za } x\in[a,b] \text{ i}$$

$$P=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \text{ ako je } f(x)<0 \text{ za } x\in[a,b]\ .$$

6.1. *Izračunavanje i osnovne osobine određenog integrala*

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za funkciju $f(x)$ onda se vrednost određenog integrala izračunava prema sledećoj formuli

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$ - ***Njutn-Lajbnicova formula***.

Ova formula daje vezu između određenog i neodređenog integrala. Na osnovu Njutn-Lajbnicove formule neposredno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. Neka su *f* i *g* funkcije za koje postoje određeni integrali na $[a,b]$ (integrabilne funkcije) i neka su *F*(*x*) i *G*(*x*) diferencijabilne funkcije na $[a,b]$ takve da je $F'(x) = f(x)$, i $G'(x) = g(x)$. Tada važi:

(1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$,

(2) $\int\limits_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)dx,\ \ \lambda \in R$

(3) $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$,

(4) za $a < c < b$ je $\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Dokaz. (4) iz $F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$, pa je

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

6.2. *Integracija pomoću smene*

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))dx = \begin{pmatrix} t = \varphi(x), x = \varphi^{-1}(t) \\ dx = \left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt \\ x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t = \varphi(b) \end{pmatrix} = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt$$

Kod integracije metodom smene, kad uvedemo smenu $t = \varphi(x)$ moramo da promenimo i granice integracije. Gornju granicu *a* zamenjujemo sa $\varphi(a)$, a donju granicu *b* sa $\varphi(b)$.

***Primer* 1**.

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \begin{pmatrix} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x=e,\ t=\ln e=1 \\ x=e^2,\ t=\ln e^2=2 \end{pmatrix} = \int_1^2 \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{8}$$

6.3. Parcijalna integracija određenog integrala

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu$$

***Primer* 1.**

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{pmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^x dx & v=\int e^x dx = e^x \end{pmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 =$$

$$e-(e^1-e^0) = e-e+1 = 1$$

6.4. Nesvojstveni integrali

Nesvojstveni (nepravi) integral je određeni integral :

(1) sa beskonačnom gornjom granicom

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(2) sa beskonačnom donjom granicom

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(3) sa beskonačnom i donjom i gornjom granicom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx, \ -\infty < c < +\infty$$

(4) gde podintegralna funkcija nije ograničena u levoj okolini tačke b $(b-\varepsilon, b)$. (prava $x=b$ je vertikalna asimptota podintegralne funkcije sa desne strane)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a}^{b-e} f(x)dx$$

(5) gde podintegralna funkcija nije ograničena u desnoj okolini tačke a $(a, a+\varepsilon)$. (prava $x=a$ je vertikalna asimptota podintegralne funkcije sa leve strane)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

(6) gde podintegralna funkcija nije ograničena u ε-okolini tačke c $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, $c\in(a,b)$ ($x=c$ - vertikalna asimptota)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Kad granične vrednosti (1), (2), . . . , (6) postoje i jesu konačne nesvojstveni integral je ***konvergentan***. U suprotnom je ***divergentan***.

***Primer* 1.**

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_{0}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{0}) = -\frac{1}{e^{\infty}}+1 = 0+1 = 1$$

***Primer* 2.** $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x-2} + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{2+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to0}\ln|x-2|\Big|_{0}^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0}\ln|x-2|\Big|_{2+\varepsilon}^{3} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\big(\ln|2-\varepsilon-2| - \ln|0-2|\big) + \lim_{\varepsilon\to0}\big(\ln|3-2| - \ln|2+\varepsilon-2|\big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}(\ln\varepsilon - \ln 2) + \lim_{\varepsilon\to0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = -\infty - \ln 2 + 0 + \infty$$

Ovaj integral je divergentan.

Pitanja i zadaci

1. Navedi definiciju određenog integrala i Njutn-Lajbnicovu formulu.
2. Navedi osobine određenog integrala.
3. Kad kažemo da je određeni integral nesvojstveni integral?

Izračunaj

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx.$, 2), $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}} dx$, 3) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 2}{e^{\frac{x}{2}}} dx$, 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 xdx$,

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 xcos^2 xdx$, 6) $\int_1^2 \sqrt{x} \ln xdx$, 7) $\int_0^{\ln 2} xe^{2x} dx$, 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2xdx$, 9) $\int_1^{e^2} x \ln \sqrt{x} dx$

10) $\int_1^e x^3 lnxdx$, 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos xdx$, 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin xdx$, 13) $\int e^{-x} \sin xdx$,

14) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$, 15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$, 16) $\int e^x \sin 2xdx$, 17) $\int_1^2 \ln \frac{x}{x+1} dx$,

18) $\int_1^e \frac{\ln \sqrt{x}}{x^2} dx$, 19) $\int_1^e x^2 \ln \sqrt{x} dx$, 20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos xdx$, 21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin xdx$, 22) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$.

7. EKONOMSKE FUNKCIJE

7.1. Funkcije tražnje i ponude

Tražnja za nekim proizvodom *X* na tržištu je količina robe koja se može prodati na tržištu i označava se sa *x*. Na tražnju utiče veliki broj faktora kao što su: najpre cena *p* samog proizvoda *X*, zatim cene ostalih sličnih proizvoda, cene subtituta, prihodi potršača i drugi faktori koje obeležavamo koje ćemo obeležiti sa $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Ako sve ove faktore posmatramo kao promenljive veličine, onda se tražnja *x* može izraziti kao funkcija više promenljivih

$$x = F(p, p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

Ispitivanje tražnje preko ovakve funkcije od više promenljivih je prilično složen problem. Zbog toga ćemo pretpostaviti da su cene drugih proizvoda i ostali faktori konstantne veličine i posmatrati tražnju kao funkciju od jedne promenljive *p*, cene proizvoda, $x = f(p)$. Kada cena proizvoda raste, tražnja za tim proizvodom opada, pa možemo reći da je tražnja opadajuća funkcija. Tražnja i cena, su kao ekonomske veličine pozitivne vrednosti. Kod određivanja oblasti definisanosti funkcije tražnje moraju da budu zadovoljeni sledeći uslovi:

$p > 0 \wedge x = f(p) > 0 \wedge x' = f'(p) < 0$ jer je funkcija tražnje monotono opadajuća. Dakle oblast definisanosti je interval $(p_1, p_2) \subset R^+$ na kojem su zadovoljeni navedeni uslovi.

$$Df = \{(p_1, p_2) \subset R^+ \,|\, (\forall p \in (p_1, p_2))(f(p) > 0) \wedge (f'(p) < 0)\}$$

U okviru oblasti definisanosti funkcija tražnje je monotono opadajuća, dakle bijekcija, pa se može odrediti inverzni oblik funkcije tražnje je $p = f^{-1}(x)$.

Obeležimo sa $\tilde{x}$ iznos ponude nekog proizvoda X na slobodnom tržištu. I na ponudu kao i na tražnju utiče veliki broj faktora kao što su cena samog proizvoda, cene drugih proizvoda, kao i cene repromaterijala, radne snage i drugih faktora. Dakle i ponudu bismo mogli da predstavimo kao funkciju od više promenljivih, ali zbog jednostavnosti pretpostavljamo da su cene ostalih faktora konstantne i ponudu posmatramo kao funkciju jedne promenljive, cene proizvoda, $\tilde{x} = g(p)$. Sa porastom cene neke robe, količina te robe na tržištu (ponuda) raste ili ostaje na istom nivou, što znači da je funkcija ponude monotono neopdajuća.

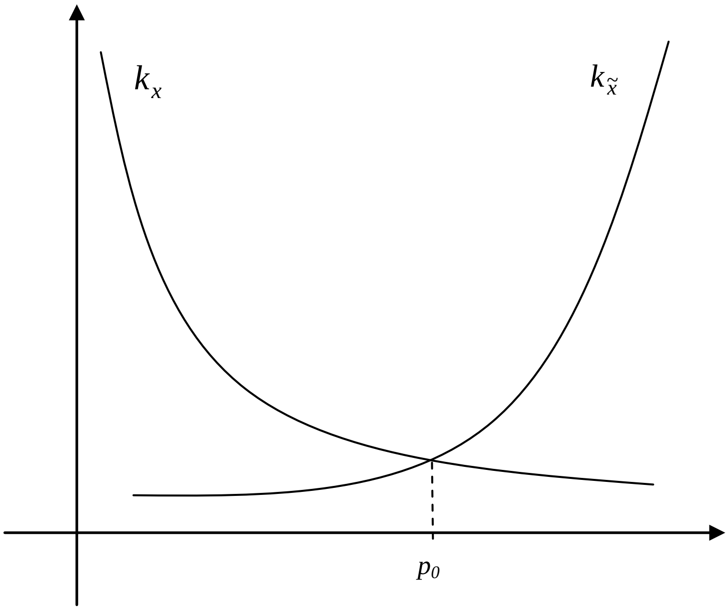
Kod određivanja oblasti definisanosti funkcije ponude moraju da budu zadovoljeni sledeći uslovi: $p > 0 \wedge x = g(p) > 0 \wedge g'(p) \geq 0$

Dakle oblast definisanosti ***funkcije ponude*** je interval $(p_1, p_2) \subset R^+$ na kojem su zadovoljeni navedeni uslovi.

$$Df = \{(p_1, p_2) | (\forall p \in (p_1, p_2))(p > 0) \wedge (g'(p) \geq 0)\}$$

Ako su za neki proizvod X na slobodnom tržištu poznate funkcija tražnje $f(p)$ i funkcija ponude $g(p)$, onda se ***uslov ravnoteže*** na tržištu za proizvod X određuje iz jednakosti ponude i tražnje, tj. $f(p) = g(p) \Leftrightarrow f(p) - g(p) = 0$. Rešenje ove jednačine ćemo obeležiti sa p_0. Cena p_0 za koju su ponuda i tražnja za neki proizvod X jednake, naziva se ***tržišna cena***. U slučaju da jednačina $f(p) - g(p) = 0$ ima više rešenja, stiče se utisak da se ravnoteža na tržištu postiže za veći broj vrednosti. Međutim funkcije f i g posmatramo samo u oblastima u kojima su cene pozitivne veličine i same funkcije monotone (f opadajuća, g rastuća), tako da uzimamo u obzir samo ono rešenje koje pripada i jednoj i drugoj oblasti definisanosti. Grafički to je tačka u kojoj se seku grafici k_x i $k_{\tilde{x}}$.

Grafici funkcija tražnje k_x i ponude $k_{\tilde{x}}$ u opštem slučaju izgledaju kao na slici.



***Primer* 1.** Neka je tražnja za mlekom na tržištu data funkcijom

$x = p^2 - 350p + 30000$ a ponuda je data funkcijom $\tilde{x} = 250p + 2500$. Odrediti oblast definisanosti funkcija ponude i tražnje i odrediti tržišnu cenu.

Rešenje. Pri određivanju oblasti definisanosti funkcije tražnje moraju da budu zadovoljeni uslovi $(p > 0) \wedge (f(p) > 0) \wedge (f'(p) < 0)$. Najpre ćemo naći nule funkcije tražnje kako bi odredili interval na kojem je ona pozitivna.

$$p^2 - 350p + 30000 = 0$$

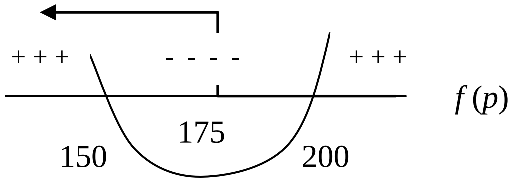
$$p_{1,2} = \frac{350 \pm \sqrt{350^2 - 4 \cdot 30000}}{2} = \frac{350 \pm \sqrt{122500 - 120000}}{2} = \frac{350 \pm 50}{2}$$

$$p_1 = \frac{350 + 50}{2} = 200, \quad p_2 = \frac{350 - 50}{2} = 150$$

Prema tome funkcija tražnje (u ovom slučaju kvadratna funkcija) je pozitivna na skupu koji je unija intervala $(-\infty, 150) \cup (200, +\infty)$. Prvi izvod funkcije tražnje je

$$f'(p) = 2p - 350 \quad f'(p) < 0 \Leftrightarrow 2p - 350 < 0 \Leftrightarrow p < 175$$

Oblast definisanosti funkcije tražnje je interval na kojem su ispunjena sva tri uslova (0,150).



Uslovi za određivanje oblasti definisanosti funkcije ponude su $(p>0)\wedge(g(p)>0)\wedge g'(p)\geq 0$

$g(p)>0 \Leftrightarrow 250p+2500>0 \Leftrightarrow p>-10$,

$g'(p)=250$ je konstantna funkcija koja je za svako p veća od nule.

Prema tome oblast definisanosti funkcije ponude je interval $(0,+\infty)$. Tržišna cena se određuje iz uslova revnoteže na tržištu $f(p)=g(p)$

$$p^2-350p+30000=250p+2500$$

$$p^2-600p+27500=0$$

$$p_{1,2}=\frac{600\pm\sqrt{600^2-4\cdot 27500}}{2}=\frac{600\pm\sqrt{360000-110000}}{2}=\frac{600\pm 500}{2}$$

$$p_1=\frac{600+500}{2}=550,\ \ p_2=\frac{600-500}{2}=50$$

Prvo rešenje ne pripada oblasti definisanosti funkcije tražnje, pa je tržišna cena drugo rešenje $p_0=50$

7.2. *Funkcija prihoda*

Neka je za neki proizvod X na slobodnom tržištu poznata količina robe x (obim tražnje) i prodajna cena p po jedinici proizvoda. Tada ukupan prihod možemo definisati

$$P(x, p) = x \cdot p\,.$$

Ovako definisan, prihod je funkcija od dve promenljive: količine robe x i cene p. Međutim ako je za prozvod X poznata funkcija tražnje $x = f(p)$ ili inverzna funkcija tražnje $p = f^{-1}(x)$, onda se funkcija prihoda može izraziti kao funkcija od jedne promenljive:

funkcija cene $P = x \cdot p = f(p) \cdot p = P(p)$ ili

kao funkcija količine proizvoda (tražnje) $P = x \cdot p = x \cdot f^{-1}(x) = P(x)$.

Ovim formulama je ukupan prihod sada iskazan kao funkcija jedne promenljive, funkcija cene p ili funkcija količine robe x.

Na osnovu osobina funkcije tražnje možemo zaključiti:

1) ako je funkcija tražnje definisana na intervalu nenegativnih realnih brojeva $[p_1, p_2]$, onda je i funkcija prihoda definasana na tom intervalu;
2) kako je $(\forall p \in (p_1, p_2))(p > 0) \wedge (x = f(p) > 0)$ to je i $(\forall p \in (p_1, p_2))(p > 0) \wedge (P(p) > 0)$;
3) kako je funkcija tražnje f diferencijabilna na intervalu (p_1, p_2) to je i funkcija prihoda diferencijiblna na tom intervalu i važi $(\forall p \in (p_1, p_2))P'(p) = (f(p) \cdot p)' = f'(p) \cdot p + f(p)$.

Ako postoji tačka $p_0 \in (p_1, p_2)$ u kojoj je $P'(p_0) = 0$ i $P''(p_0) < 0$ to znači da se za cenu p_0 postiže maksimalan prihod $P_{\max} = P(x_0)$.

Primer 1. Data je funkcija tražnje $x = (p-10)^2$.

a) Odrediti funkciju ukupnog prihoda $P(p)$ i njenu oblast definisanosti.

b) Odrediti cenu p_0 i tražnju x_0 pri kojima se ostvaruje maksimalan prihod i odrediti veličinu maksimalnog prihoda.

Rešenje.

a) U formuli $P = x \cdot p$ zamenimo *x* sa $(p-10)^2$ pa dobjamo

$P = x \cdot p = (p-10)^2 p = P(p)$. Oblast definisanosti odredjujemo iz uslova $(p>0) \wedge (f(p)>0) \wedge (f'(p)<0)$. $f(p) = (p-10)^2$ je veće od nule za svako *p*. $f'(p) = 2(p-10) < 0$ za $p < 10$, pa je oblast definisanosti interval (0, 10).

b) Za maksimum funkcije neophodan nam je prvi izvod funkcije pa je

$P'(p) = ((p-10)^2 p)' = 2(p-10)p + (p-10)^2 = (p-10)(3p-10)$

$P'(p) = 0$ za $p_1 = 10$ i $p_2 = \dfrac{10}{3}$. $P''(p) = 3p - 10 + (p-10)\cdot 3 = 6p - 40$

$p_1 = 10$ ne pripada oblasti definisanosti, $P''(10/3) = -20 < 0$ pa funkcija ima maksimum u $p_2 = \dfrac{10}{3}$ i maksimalni prihod iznosi

$P_{\max} = P(10/3) = 4000/27$

vrednost funkcije tražnje za cenu $p_2 = \dfrac{10}{3}$ iznosi $x = f(10/3) = 400/9$

U ekonomskoj analizi od interesa je ispitivanje promene prihoda *P* u zavisnosti od promene cene odnosno tražnje sa različitih nivoa. Ova ispitivanja se svode na ispitivanja takozvanih graničnih (marginalnih) prihoda.

Neka je $p_0 \in (p_1, p_2)$ i Δp takvo da $p + \Delta p \in (p_1, p_2)$. Ako se prodajna cena poveća za Δp onda će se ukupan prihod promeniti sa nivoa $P(p_0)$ za

$\Delta P = P(p_0 + \Delta p) - P(p_0)$.

Definicija* 1.** Neka je $P(p)=p\cdot f(p)$ funkcija ukupnog prihoda definisana na intervalu nenegativnih brojeva $[p_1,p_2]$. ***Granični prihod u tački $p_0\in(p_1,p_2)$, u oznaci $P_G(p_0)$ je granična vrednost

$$P_G(p_0)=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{P(p_0+\Delta p)-P(p_0)}{\Delta p}$$

ako ona postoji i ako jeste konačna.

Na osnovu definicije prvog izvoda zaključujemo da je granični prihod $P_G(p_0)=P'(p_0)$. Kako je funkcija $P(p)$ diferencijabilna na intervalu (p_1,p_2), važi $P_G(p)=P'(p)=\dfrac{dP}{dp}$ odnosno ako je $P=P(x)$, $P_G(x)=P'(x)=\dfrac{dP}{dx}$.

Ekonomska interpretacija graničnog prihoda je sledeća: ako se cena *p* promeni sa nivoa p_0 za jedinicu, ukupan prihod će se promeniti sa nivoa $P(p_0)$ približno za $P_G(p_0)$.

Primer 2. Neka je funkcija prihoda kao u prethodnom primeru $P(p)=(p-10)^2p$. Izračunati promenu prihoda koja nastaje povećanjem cene sa nivoa $p_0=5$ novčanih jedinica za jednu novčanu jedinicu.

Rešenje. U prethodnom primeru smo već odredili prvi izvod funkcije prihoda pa je funkcija graničnog prihoda

$P_G(p)=P'(p)=(p-10)(3p-10)$. $P_G(5)=(5-10)(3\cdot 5-10)=-25$, što znači da će se ukupan prihod smanjiti približno za 25 ako se cena poveća za 1. To možemo proveriti ako izračunamo $P(5)=(5-10)^2\cdot 5=125$ i $P(6)=(6-10)^2\cdot 6=96$. Prihod se smanjio za 125 – 96 = 29.

Ukoliko je poznata funkcija graničnog prihoda, može se odrediti funkcija ukupnog prihoda.

Iz $P_G(p)=P'(p)=\dfrac{dP}{dp}$ sledi da je $dP=P_G(p)dp\Rightarrow P=\int P_G(p)dp+C$, odnosno iz $P_G(x) = P'(x) = \dfrac{dP}{dx}$ sledi da je $dP = P_G(x)dx \Rightarrow P = \int P_G(x)dx + C$.

Vrednost konstante C određuje se iz uslova da je $P(0) = 0$, ako je cena 0 i prihod je 0, odnosno ako je tražnja 0 i prihod je 0.

Primer 3. Neka je $P_G(p) = 3p^2 - 20p + 25$ funkcija graničnog prihoda za neki proizvod. Odrediti funkciju tražnje za taj proizvod.

Kako je $P = \int P_G(x)dx + C$ $P = \int (3p^2 - 20p + 25)dp = p^3 - 10p^2 + 25p + C$.

Na osnovu uslova $P(0) = 0$ dobijamo da je $C = 0$, pa je funkcija ukupnog prihoda $P = p^3 - 10p^2 + 25p$. Na osnovu $P = xp$ imamo da je

$xp = p^3 - 10p^2 + 25p = (p^2 - 10p + 25) \cdot p$, pa je funkcija tražnje

$x = (p^2 - 10p + 25) = (p - 5)^2$

***Primer* 4.** Neka je $x = \sqrt{19200 - 4p}$ funkcija tražnje za neki proizvod *X*. Odrediti cenu p_0 i količinu robe x_0 tako da ukupan prihod bude maksimalan, kao i veličinu tog prihoda.

Rešenje. Za korensku funkciju $f(p) = \sqrt{(19200 - 4p)}$, oblast definisanosti određujemo iz uslova $19200 - 4p > 0 \Rightarrow p < 4800$.

Prvi izvod je $f'(p) = \dfrac{-2p}{\sqrt{19200 - 4p}} < 0$, pa je funkcija tražnje monotono opadajuća na celoj oblasti definisanosti. Sada posmatramo $f(p)$ kao ekonomsku funkciju. Za određivanje oblast definisanosti funkcije tražnje imamo još uslov da je $p > 0$, pa je oblast definisanosti $Df = (0,4800)$.

Kako je funkcija tražnje korenska funkcija, lakše će biti da funkciju prihoda izrazimo preko inverzne funkcije tražnje, tj. preko *x*.

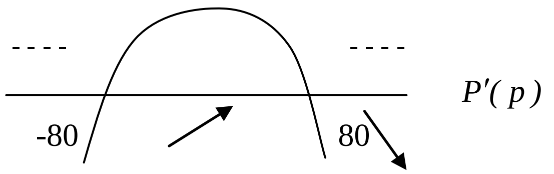
$x = f(p) = \sqrt{19200 - 4p} \Rightarrow x^2 = 19200 - 4p \Rightarrow p = 4800 - 0{,}25x^2 = f^{-1}(x)$

$P = x \cdot p = x \cdot (4800 - 0{,}25x^2) = 4800x - 0{,}25x^3$

$P'(x) = 4800 - 0{,}75x^2$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 4800 - 0{,}75x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 80$

Rešenje $x = -80$ je manje od nule pa ga nećemo razmatrati. Posmatramo znak prvog izvoda funkcije prihoda



za $x \in (-80, 80), P'(x) > 0$ a za $x \in (-\infty, -80) \cup (80, +\infty), P'(x) < 0$

Funkciju prihoda, kao ekonomsku funkciju, posmatramo na intervalu (0, ∞). Na intervalu (0, 80), funkcija je monotono rastuća, a na intervalu (80, ∞) funkcija je monotono opadajuća. Prema tome, funkcija prihoda ima maksimum za $x = 80$, pa je $x_0 = 80$. Cena pri kojoj se ostvaruje maksimalni prihod je

$p_0 = f^{-1}(x_0) = 4800 - 0{,}25 \cdot 80^2 = 3200$

a sam maksimalni prihod iznosi

$P_{\max} = P(80) = 256000$.

***Primer* 5.** Neka je funkcija graničnih prihoda za neki proizvod *X*,

$P_G = \frac{1}{2}(900 - 3x^2)$. Odrediti funkciju ukupnog prihoda i funkciju tražnje za taj proizvod.

Rešenje. $P_G = \frac{1}{2}(900 - 3x^2) \Rightarrow P = \frac{1}{2}\int (900 - 3x^2)dx = \frac{1}{2}(900x - x^3) + C$.

$P(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow P(x) = 450x - \frac{x^3}{2}$

Iz uslova da je $P(x) = x \cdot f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{P(x)}{x} = 450 - \frac{x^2}{2}$

Iz uslova da je $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ određujemo $f(x)$. Uvodimo smenu $t = f(x)$, pa je

$f^{-1}(t)=450-\frac{t^2}{2}=x \Rightarrow t=\sqrt{2(450-x)}=\sqrt{900-2x}$ odnosno

$f(x)=\sqrt{900-2x}$. Kako je funkcija tražnje, funkcija koja zavisi od cene

zapisujemo $x = f(p)=\sqrt{900-2p}$.

Pitanja i zadaci

1. Navedi osobine funkcije tražnje.
2. Navedi osobine funkcije ponude.
3. Šta je prihod i kako se može izraziti funkcija prihoda kao funkcija jedne promenljive?
4. Šta je funkcija graničnog prihoda? Objasni njenu ekonomsku interpretaciju.
5. Neka je $x=10e^{-\frac{p}{10}+2}$ funkcija tražnje za neki proizvod na nekom tržištu. Odrediti oblast definisanosti funkcije tražnje. Izračunati cenu p i tražnju x za koju će ukupan prihod biti maksimalan, kao i veličinu tog prihoda.
6. Za neki proizvod funkcija tražnje je $x=-2p+24000$. Odrediti oblast definisanosti funkcije tražnje. Izračunati cenu p i tražnju x za koju će ukupan prihod biti maksimalan, kao i veličinu tog prihoda.
7. Neka je tražnja za nekim proizvodom X na tržištu data funkcijom $x = p^2-500p+57600$.

   a) Odrediti oblast definisanosti funkcije tražnje.

   b) Sa kojom cenom se postiže maksimalni prihod i koliko on iznosi?

7.3. Funkcija troškova

Označimo sa sa T ukupne troškove proizvodnje proizvoda X. Ukupni troškovi zavise pre svega od fizičkog obima proizvodnje x, ali i od cena faktora proizvodnje (materijala, radne snage, . . .) $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Funkcija ukupnih troškova T može izraziti kao funkcija više promenljivih

$$T = \Phi(x, p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

Zbog jednostavnijeg proučavanja funkcije troškova, cene faktora proizvodnje ćemo smatrati konstantnim, a funkciju troškova ćemo posmatrati kao funkciju od jedne promenljive x (obima proizvodnje) $T = T(x)$. Ukupni troškovi se sastoje od fiksnih T_F (troškovi koji postoje i kad se ništa ne proizvodi) i varijabilnih T_V (troškovi koji zavise od fizičkog obima proizvodnje), pa funkciju troškova možemo izraziti kao

$$T = T_V(x) + T_F = T(x)$$

$T_F = T(0) > 0$. Sa porastom obima proizvodnje ukupni troškovi rastu, pa je funkcija troškova monotono rastuća, odnosno $T'(x) = T_V'(x) > 0$. Na osnovu svih navedenih uslova, oblast definisanosti funkcije troškova je

$$Df = \left\{ [0,b] \,\middle|\, b \in R^+ \wedge (\forall x \in [0,b]) T(x) > 0 \wedge T'(x) = T_V(x) > 0 \right\}$$

Neka je $x_0 \in (0,b)$ i neka je Δx takvo da $x_0 + \Delta x \in (0,b)$. Ako se obim proizvodnje poveća sa nivoa x_0 za Δx, onda će se ukupni troškovi povećati sa nivoa $T(x_0)$ za $\Delta T = T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)$.

Definicija* 2.** Neka je $T = T(x)$ funkcija ukupnih troškova definisana na intervalu nenegativnih brojeva $[0,b]$. ***Granični troškovi u tački $x_0 \in (0,b)$, u oznaci $T_G(x_0)$ su jednaki graničnoj vrednosti

$$T_G(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)}{\Delta x}$$

ako ona postoji i ako jeste konačna.

Na osnovu definicije izvoda funkcije zaključujemo da je $T_G(x_0) = T'(x_0)$. Kako je funkcija $T = T(x)$ diferencijabilna na intervalu (0, *b*) sledi da je

$$T_G(x) = T'(x) = \frac{dT}{dx}, \left(\forall x \in (0, b)\right).$$

Ekonomska interpretacija graničnih troškova je sledeća: Ako se fizički obim proizvodnje poveća sa nivoa x_0 za jedinicu, ukupni troškovi će se povećati približno za $T_G(x_0)$.

Ukoliko nam je poznata funkcija graničnih troškova, možemo odrediti funkciju ukupnih troškova na sledeći način

$$T_G(x) = \frac{dT}{dx} \Rightarrow dT = T_G(x) \cdot dx \Rightarrow T = \int T_G(x) \cdot dx + C.$$

Integracionu konstantu *C* određujemo iz uslova da je $T(0) = T_F = C$.

Prosečni troškovi su troškovi po jedinici proizvoda i određuju se po formuli

$$\overline{T}(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

Od interesa je odrediti nivo proizvodnje sa minimalnim prosečnim troškovima. Za to je potrebno odrediti nulu prvog izvoda funkcije prosečnih troškova. Ako je $\overline{T'}(x_0) = 0$ i $\overline{T''}(x_0) > 0$ onda je $\overline{T}_{\min} = \overline{T}(x_0)$

Odnos graničnih i prosečnih troškova:

1) Granični troškovi jednaki su prosečnim troškovima na nivou proizvodnje x_0 na kojem se ostvaruju minimalni prosečni troškovi tj.

$$\overline{T}(x_0) = T_G(x_0) \Leftrightarrow \overline{T}_{\min} = \overline{T}(x_0)$$

$$\overline{T'}(x) = \left(\frac{T(x)}{x}\right)' = \frac{T'(x) \cdot x - T(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow T'(x) \cdot x - T(x) = 0$$

$$T'(x) = \frac{T(x)}{x}$$

Kako je $T_G = T'(x)$ i $\overline{T}(x) = \dfrac{T(x)}{x}$, poslednji uslov je ekvivalentan

$T_G(x) = \overline{T}(x)$.

2) Ako su na nivou proizvodnje x_0, $T_G(x_0) < \overline{T}(x_0)$, to znači da će povećanje proizvodnje sa ovog nivoa dovesti do smanjenja prosečnih troškova pa postoji ekonomsko opravdanje za povećanjem proizvodnje sa ovog nivoa.
3) Ako su na nivou proizvodnje x_0, $T_G(x_0) > \overline{T}(x_0)$, to znači da će povećanje proizvodnje sa ovog nivoa dovesti do povećanja prosečnih troškova pa ne postoji ekonomsko opravdanje za povećanjem proizvodnje sa ovog nivoa.

***Primer* 1.** Neka je $T_G(x) = 6x + 200$ funkcija graničnih troškova proizvodnje nekog proizvoda *X*, a fiksni troškovi iznose 3 000 000 novčanih jedinica. Odrediti nivo proizvodnje za koji se ostvruju minimalni prosečni troškovi, a potom i veličinu tih troškova.

Rešenje.

$$T_G(x) = 6x + 200 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 6x + 200 \Rightarrow T = \int (6x + 200)dx = 3x^2 + 200x + C$$

$$C = T(0) = 3000000 \Rightarrow T(x) = 3x^2 + 200x + 3000000$$

$$\overline{T}(x) = \frac{T(x)}{x} = 3x + 200 + \frac{3000000}{x}$$

$$\overline{T}'(x) = 3 - \frac{3000000}{x^2} = \frac{3x^2 - 3000000}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1000000)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1000$$

Za $x \in (0,1000), \overline{T}'(x) < 0$, a za $x \in (1000,+\infty), \overline{T}'(x) > 0$, što znači da funkcija prosečnih troškova postiže minimum za x = 1000. Znači minimalni prosečni troškovi proizvodnje su na nivou proizvodnje 1000 komada i

$$\overline{T}_{\min} = \overline{T}(1000) = 3000 + 200 + 3000 = 6200.$$

***Primer* 2.** Za proizvod *X* data je funkcija ukupnih troškova

$$T(x)=0{,}01x^2+30x+900$$

a) odrediti obim proizvodnje pri kojem su granični i prosečni troškovi jednaki.

b) oceniti da li je opravdano povećavati obim proizvodnje sa nivoa od 400 jedinica proizvoda.

$a)$ $T_G(x)=0{,}02x+30,\ \overline{T}(x)=\dfrac{0{,}01x^2+30x+900}{x}$

$$T_G(x)=\overline{T}(x)\Leftrightarrow 0{,}02x+30=\frac{0{,}01x^2+30x+900}{x}\Leftrightarrow\frac{0{,}01x^2-900}{x}=0\Leftrightarrow x=300$$

Pri obimu proizvodnje *x* = 300 postižu se minimalni prosečni troškovi.

$b)$ $T_G(400)=0{,}02\cdot 400+30=38,\ \overline{T}(400)=\dfrac{0{,}01\cdot 400^2+30\cdot 400+900}{400}=36{,}25$

$T_G(400)>\overline{T}(400)$ što znači da bi povećanje proizvodnje sa nivoa 400 dovelo do povećanja prosečnih troškova proizvodnje, tako da ne postoji ekonomsko opravdanje za ovim povećanjem.

7.4. Funkcija dobiti

Dobit, ostvarena u proizvodnji nekog proizvoda *X*, u oznaci *D*, definiše se kao razlika prihoda *P* i troškova *T*

$$D=P-T\ .$$

Ako su za neki proizvod poznate funkcija prihoda, funkcija troškova i funkcija tražnje $x=f(p)$, funkciju dobiti možemo izraziti kao funkciju od jedne promenljive

$$D=D(x)=P(x)-T(x)=x\cdot f^{-1}(x)-T(x)\ \text{ili}$$

$$D=D(p)=p\cdot f(p)-T(f(p))$$

Neka su za neki proizvod *X*, funkcija prihoda $P=P(x)$ i funkcija troškova $T=T(x)$ definisane na intervalu $(0,b)\in R^+$. Interval $(x_1,x_2)\subset(0,b)$ za koji važi

$$\left(\forall x \in (x_1, x_2)\right)\left(D(x) = P(x) - T(x) > 0\right)$$

naziva se ***interval rentabilnosti***.

Pošto su funkcije prihoda i troškova diferencijabilne na intervalu (0,*b*) onda je i funkcija dobiti diferencijabilna na tom intervalu. Zanimljiv je nivo proizvodnje x_0 pri kojem se ostvaruje maksimalna dobit. On se određuje iz uslova

$D'(x_0) = 0$ i $D''(x_0) < 0$ na osnovu teoreme o ekstremnim vrednostima.

Obim proizvodnje $x_0 \in (x_1, x_2)$ za koji se ostvrauje maksimalna dobit

$D_{\max} = D(x_0)$ naziva se ***optimalna proizvodnja***, a cena $p_0 = f^{-1}(x_0)$ naziva se ***optimalna prodajna cena***.

***Primer* 1.** Neka je za proizvod *X* poznata funkcija tražnje $x = -0{,}5p + 11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(x) = 2x^2 + 10 \cdot 10^6$. Odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje, optimalnu cenu i maksimalnu dobit.

Rešenje.

$x = -0{,}5p + 11000$

$p = -2x + 22000$

$P(x) = x \cdot p = x(-2x + 22000) = -2x^2 + 22000x$

$D(x) = P(x) - T(x) = -2x^2 + 22000x - (2x^2 + 10 \cdot 10^6) = -4x^2 + 22000x - 10 \cdot 10^6$

Interval rentabilnosti je interval nenegativnih brojeva na kojem je funkcija dobiti pozitivna. Da bismo odredili ovaj interval, odredićemo najpre nule funkcije dobiti. Funkcija dobiti je kvadratna funkcija pa izračunavamo rešenja kvadratne jednačine.

$$x_{1,2} = \frac{-22000 \pm \sqrt{484 \cdot 10^6 - 160 \cdot 10^6}}{-8} = \frac{-22000 \pm \sqrt{324 \cdot 10^6}}{-8} = \frac{-22000 \pm 18000}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-22000 + 18000}{-8} = 500 \quad x_2 = \frac{-22000 - 18000}{-8} = 5000$$

Dakle interval rentabilnosti je (500, 5000) jer je na tom intervalu kvadratna funkcija $-4x^2 + 22000x - 10 \cdot 10^6$ veća od nule.

Optimalni obim proizvodnje je nivo proizvodnjr za koji se ostvaruje maksimalna dobit. Da bi odredili maksimum funkcije dobiti potrebno ja da nađemo njen prvi izvod i odredimo nule prvog izvoda.

$D'(x) = -8x + 22000 \quad D'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x + 22000 = 0 \Leftrightarrow x = 2750$

Za $x = 2750$ funkcija ima ekstremnu vrednost, a na osnovu znaka drugog izvoda za tu vrednost određujemo da li se radi o minimumu ili maksimumu.

$D''(x) = -8 < 0$. Drugi izvod je konstantna funkcija, manja od nule za bilo koje x pa prema tome i za $x = 2750$. Dakle maksimalna dobit se ostvaruje za obim proizvodnje $x_0 = 2750$.

Iznos maksimalne dobiti izračunavamo $D_{\max} = D(2750) = 20250000$.

Optimalnu cenu izračunavamo $p_0 = -2x_0 + 22000 = -2 \cdot 2750 + 22000 = 16500$.

Pitanja i zadaci

1. Kako se definiše funkcija troškova i koje su njene osobine?
2. Definiši funkciju graničnih troškova i objasni njenu ekonomsku interpretaciju.
3. Objasni odnos između funkcija prosečnih i graničnih troškova.
4. Šta je dobit? Šta je interval rentabilnosti i kako se određuje?
5. Šta je optimalni nivo proizvodnje i kako se određuje?
6. Neka je $P_G(x) = -x + 24000$ funkcija graničnih prihoda, a funkcija graničnih troškova $T_G(x) = 3x$ za neki proizvod *X*. Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu zaradu (dobit), pod uslovom da su fiksni troškovi 64 miliona novčanih jedinica.

7. Neka su za neki proizvod *X* date funkcija tražnje $x=-0{,}2p+100$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T}=2{,}5x+350+250x^{-1}$. Odredi interval rentabilne proizvodnje, optimalnu količinu proizvodnje i optimalnu prodajnu cenu.
8. Date su redom $P_G(x)=-3x^2+40x+800$ i $\overline{T}(x)=x^2+14x+2400x^{-1}$, funkcija graničnih prihoda i funkcija prosečnih troškova za neki proizvod, gde x predstavlja količinu tog proizvoda. Naći interval rentabilnosti proizvodnje.
9. Neka je $p=-0{,}001x+80$ funkcija tražnje za neki proizvod i $T(x)=30x+10^5$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje. Naći cenu *p* pri kojoj se ostvaruje maksimalna dobit i izračunati tu dobit.
10. Za neki proizvod date su funkcija tražnje $x=-2p+12000$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T}(x)=2x-4000+\dfrac{1000000}{x}$. Za koju cenu *p* se ostvaruje maksimalna dobit i kolika je ta dobit?
11. Data je funkcija tražnje $x = 90 - 2p$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T}=x^2-8x+57+\dfrac{2}{x}$. Naći nivo proizvodnje pri kojem se ostvaruje

    a) maksimalan prihod

    b) minimalni granični troškovi

    c) maksimalna dobit.

12. Funkcija tražnje za određeni proizvod *X* je $x=-0{,}5p+17500$. Ako je $T(x)=3x^2+50\cdot 10^6$ funkcija ukupnih troškova za proizvod *X*, naći:
    a) oblast definisanosti funkcije tražnje,
    b) interval rentabilnosti,
    c) optimalni obim prozvodnje x_0 , maksimalnu dobit i cenu p_0 u uslovima optimalne proizvodnje.

13. Neka je za neki proizvod poznata funkcija graničnih prihoda

$P_G = -4x + 11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(x) = 2x^2 + 10 \cdot 10^6$.

odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

14. Neka je $p = -0.001x + 80$ inverzna funkcija tražnje za neki prozvod i

$T(x) = 30x + 10^5$ funkcija ukupnih troškova. Naći optimalnu prodajnu cenu p_0, ostvarenu maksimalnu dobit i interval rentabilne prozvodnje.

15. Neka su za proizvod X date redom funkcije tražnje i prosečnih troškova

$x = -480p + 200$ i $\overline{T}(x) = \dfrac{x^2}{25600}$.

   a. odrediti interval rentabilne proizvodnje;

   b. naći optimalnu količinu proizvodnje i optimalnu cenu.

16. Neka je $p = -0{,}001x + 80$ inverzna funkcija tražnje za neki proizvod i

$T(x) = 30x + 10^5$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje. Naći interval rentabilnosti, optimalnu prodajnu cenu p_0 i ostvarenu maksimalnu dobit.

17. Neka je $T(x) = 3x^2 + 35 \cdot 10^6$ funkcija troškova proizvodnje za neki aparat *X,* i neka je $x = -0{,}5p + 15000$ funkcija tražnje. Odrediti interval rentabilnosti, odrediti optimalnu proizvodnju i veličinu maksimalne dobiti.

18. Za neki proizvod date su: $T(x) = 2x^2 - 9000x + 2000000$ funkcija ukupnih troškova i $x = -p + 3000$ funkcija tražnje. Odrediti nivo proizvodnje pri kojoj je dobit maksimalna i izračunati tu dobit.

19. Za neki proizvod date su funkcija tražnje $x=-2p+12000$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T}(x)=2x-4000+\frac{1000000}{x}$. Za koju cenu p se ostvaruje maksimalna dobit i kolika je ta dobit?

20. Neka je $p=-0{,}001x+80$ funkcija tražnje za neki proizvod i neka je $T(x)=30x+10^5$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje. Naći cenu p_0 pri kojoj se ostvaruje maksimalna dobit i izračunati tu dobit.

21. Ukupan dnevni prihod i dnevni troškovi jednog preduzeća dati su funkcijama: $P(x)=-5\cdot10^{-4}x^2+80x$ i $T(x)=50x+2\cdot10^5$. Odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje, odgovarajuću cenu i ostvarenu maksimalnu dobit.

22. Neka su za neki proizvod X date: $P_G(x)=-x+18000$ funkcija graničnih prihoda i $T(x)=0{,}5x^2-5200x+2\,310\,000$ funkcija ukupnih troškova. Odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje i dobit u uslovima optimalne proizvodnje.

7.5. Elastičnost funkcije

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $[a,b] \subset R^{+}$ i neka su $x_0, x_1 \in (a,b)$ takvi da je $x_1 > x_0$. Obeležimo sa $y_0 = f(x_0)$ i $y_1 = f(x_1)$. Onda je priraštaj argumenta $\Delta x = x_1 - x_0$, a priraštaj funkcije $\Delta y = y_1 - y_0$.

***Definicija* 1.** Elastičnost funkcije $y = f(x)$, u tački $x_0 \in (a,b)$, u oznaci $E_y(x_0)$ je

granična vrednost $E_y(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\Delta y}{y_0}}{\dfrac{\Delta x}{x_0}} = \dfrac{x_0}{y_0} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ukoliko ona postoji.

Granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je prema jednoj od definicija, izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0. Dakle $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, pa je $E_y(x_0) = \dfrac{x_0}{y_0} f'(x_0) = \dfrac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0)$.

Ako je funkcija $y = f(x)$ definisana na zatvorenom intervalu $[a,b] \subset R^{+}$, i diferencijabilna na intervalu (a,b), onda možemo definisati ***elastičnost funkcije*** na intervalu (a,b) $E_y(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

$E_y(x_0)$ predstavlja vrednost funkcije $E_y(x)$ u tački x_0 i ta vrednost se naziva ***koeficijent elastičnosti***.

Ekonomska interpretacija koeficijenta elastičnosti je sledeća: ako se vrednost ekonomske veličine x poveća sa nivoa x_0 za 1%, onda se vrednost ekonomske veličine $y = f(x)$ promeni sa nivoa $y_0 = f(x_0)$ za k% ($k = E_y(x_0)$).

Ako je funkcija $x = f^{-1}(y)$ inverzna funkciji $y = f(x)$ onda važi

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)} \text{ odnosno } E_y(x) \cdot E_x(y) = 1.$$

Ako je:

1) $|E_y(x)| < 1$, funkcija $y = f(x)$ je ***neelastična***;

2) $|E_y(x)| > 1$, funkcija $y = f(x)$ je ***elastična***;

3) $|E_y(x)| = 1$, funkcija $y = f(x)$ je ***jedinično*** **(*indiferentno*)** ***elastična.***

7.5.1. Elastičnost tražnje

Za funkciju tražnje $x = f(p)$ i njen inverzni oblik $p = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ važi

$$p > 0,\ f(p) > 0,\ \varphi(x) > 0,\ f'(p) < 0,\ \varphi'(x) < 0.$$

Zato za elastičnost ovih funkcija važi

$E_x(p) = \dfrac{p}{f(p)} f'(p) < 0$ i $E_p(x) = \dfrac{x}{\varphi(x)} \varphi'(x) < 0$, a na osnovu osobine elastičnosti inverznih funkcija je $E_x(p) \cdot E_p(x) = 1$.

Ukupni prihod se izračunava po formuli $P = x \cdot p$, odnosno izražen kao funkcija od jedne promenljive $P(p) = p \cdot f(p)$ ili $P(x) = x \cdot \varphi(x)$.

Vezu između funkcije ukupnog prihoda i elastičnosti funkcije tražnje možemo iskazati na sledeći način

$$P_G(p) = P'(p) = f(p) + p \cdot f'(p) = f(p)\left(1 + \frac{p}{f(p)} f'(p)\right) = f(p)\left(1 + E_x(p)\right) \text{ ili}$$

$$P_G(x) = P'(x) = \varphi(x) + x \cdot \varphi'(x) = \varphi(x)\left(1 + \frac{x}{\varphi(x)} \varphi'(x)\right) = \varphi(x)\left(1 + E_p(x)\right).$$

Funkciju prihoda možemo analizirati na osnovu elastičnosti funkcije tražnje na sledeći način:

1) ako je $\left|E_x(p)\right| < 1 \Rightarrow 0 > E_x(p) > -1 \Rightarrow P_G(p) = P'(p) > 0$ tj. funkcija prihoda je monotono rastuća. Ako je funkcija prihoda monotono rastuća, povećanje cene će dovesti do povećanja prihoda, pa treba doneti odluku o povećanju cene;
2) ako je $\left|E_x(p)\right| > 1 \Rightarrow E_x(p) < -1 \Rightarrow P_G(p) = P'(p) < 0$ tj. funkcija prihoda je monotono opadajuća. Ako je funkcija prihoda monotono opadajuća, povećanje cene će dovesti do smanjenja prihoda, pa ne treba donositi odluku o povećanju cene;
3) ako je $\left|E_x(p)\right| = 1 \Rightarrow E_x(p) = -1 \Rightarrow P_G(p) = P'(p) = 0$ tj. funkcija prihoda postiže maksimum pri toj ceni *p*. Ako je funkcija prihoda indiferentno elastična za neku cenu *p*, ukupni prihod je maksimalan pri takvoj ceni, pa cenu ne treba menjati.

***Primer* 1.** Na određenom tržištu je za proizvod *X* data funkcija tražnje $x = \dfrac{40000}{3p+16}$.

Odrediti elastičnost tražnje za cenu *p* = 8 novčanih jedinica, a zatim obrazložiti da li je opravdano povećanje cene sa tog nivoa.

Rešenje.

$$E_x(p) = \frac{p}{f(p)}\, f'(p) = \frac{p}{\dfrac{40000}{3p+16}} \cdot \left(\frac{40000}{3p+16}\right)' = \frac{p(3p+16)}{40000} \cdot 40000 \cdot \frac{-3}{(3p+16)^2} = \frac{-3p}{3p+16}$$

$$E_x(8) = \frac{-24}{40} = -0{,}6 \Rightarrow \left|E_x(8)\right| = 0{,}6 < 1$$

Ekonomsko tumačenje ovog rezultata je sledeće: povećanje cene za 1% dovodi do pada tražnje za 0,6%. Takođe tražnja je neelastična, pa će povećanje cene dovesti do povećanja ukupnog prihoda.

***Primer* 2.** Neka je $p = 4800 - \dfrac{x^2}{4}$ inverzna funkcija tražnje za proizvod *X*. Odrediti fleksibilnost cene *p* za tražnju *x* = 80 jedinica proizvoda, a zatim na osnovu dobijenih rezultata zaključiti kakav je ukupan prihod *P* na tom nivou tražnje.

Rešenje.

$$E_p(x) = \frac{x}{\varphi(x)}\varphi'(x) = \frac{x}{4800 - \dfrac{x^2}{4}}\left(4800 - \frac{x^2}{4}\right)' = \frac{-2x^2}{19200 - x^2}$$

$$E_p(80) = \frac{-2\cdot 80^2}{19200 - 80^2} = -1$$

Cena na nivou tražnje *x* = 80 je indiferentno elastična pa je

$P_G(80) = P'(80) = \varphi(80)\left(1 + E_p(80)\right) = \varphi(80)(1-1) = 0$, što znači da za $x = 80$ funkcija prihoda dostiže svoj maksimum, pa ne treba menjati nivo tražnje.

8. FINANSIJSKA MATEMATIKA

8.1. *Procentni račun*

Osnovne veličine procentnog računa su ***glavnica, procentna stopa i procentni prinos*** (iznos).

Glavnica G predstavlja osnovnu vrednost na koju se izračunavaju povećanja ili smanjenja za zadatu procentnu stopu.

Procentna stopa p predstavlja broj koji pokazuje za koliko se jedinica menja (povećava ili smanjuje) glavnica na svakih svojih 100 jedinica.

Procentni prinos (iznos) P predstavlja veličinu koja pokazuje ukupnu promenu glavnice ***G*** pri procentnoj stopi ***p***.

Procentna stopa se može izraziti u procentima ***p***% ili u decimalnom zapisu $\frac{p\%}{100}$.

Tako procentnom zapisu 36% odgovara decimalni zapis 0,36. Kako je decimalni zapis podesniji, koristićemo procentnu stopu ***p*** u njenom decimalnom zapisu.

Procentni račun od sto

Odnos između veličina ***G***, ***p*** i ***P*** je dat proporcijom

$$\boldsymbol{G : P = 100 : p}$$

znajući da su pri konstantnoj stopi ***p***, veličine ***G*** i ***P*** direktno proporcionalne, tj. pri konstantnoj kamatnoj stopi, što je veća glavnica veći je i procentni prinos.

Iz ove proporcije se dobija $G = \dfrac{P \cdot 100}{p}$, $P = \dfrac{G \cdot p}{100}$ i $p = \dfrac{P \cdot 100}{G}$

Za procentnu stopu datu u decimalnom zapisu proporcija dobija oblik

$$\boldsymbol{G : P = 1 : p}$$

odakle je $G = \dfrac{P}{p}$, $P = G \cdot p$ i $p = \dfrac{P}{G}$.

Primer 1. Od 76 studenata koji su polagali neki ispit, 20 ih je položilo sa ocenom 10. Izrazi to u procentima.

Rešenje. $G = 76$, $P = 20 \Rightarrow p = \frac{P}{G} = 0{,}26316$, $p = 26{,}316\%$.

Primer 2. Nabavna cena je povećana za 18%, iznos poreza na promet. Nakon toga je povećana još za 17%, tako da je cena robe 236 dinara. Izračunati kolika je nabavna cena.

Rešenje. Ako nabavnu cenu obeležimo sa G, a stopu poreza $p_1 = 0{,}18$, porez iznosi $P_1 = G \cdot p_1 = 0{,}18G$, pa je prodajna cena $G_1 = G + P_1 = 1{,}18G$. Poskupljenje $p_2 = 17\%$ izračunavamo na osnovicu G_1. Iznos poskupljenja je

$P_2 = G_1 \cdot 0{,}17 = 0{,}17 \cdot 1{,}18G = 0{,}2006G$, pa je konačna cena

$G_2 = G_1 + P_2 = 1{,}18G + 0{,}2006G = 1{,}3806G$. Kako je konačna cena $G_2 = 236$,

$G = 236 / 1{,}3806 = 170{,}94$.

Procentni račun niže sto i procentni račun više sto

Često nam je u praktičnim problemima umesto glavnice ***G*** poznata uvećana ***G*** + ***P***, ili umanjena ***G – P*** glavnica za odgovarajući procentni prinos ***P*** po zadatoj stopi ***p***. Na osnovu datih ***G*** + ***P*** ili ***G – P***, nepoznata glavnica ***G*** ili nepoznat prinos ***P*** se ne mogu izračunati primenom prethodnih formula. Ako početnu proporciju

$$\boldsymbol{G : P = 100 : p}$$

zapišemo u obliku razlomka $\frac{G}{P} = \frac{100}{p}$, pa zatim dodamo (oduzmemo) levoj i desnoj strani 1, $\frac{G}{P} \pm 1 = \frac{100}{p} \pm 1$, svođenjem na najmanji zajednički sadržalac dobijamo $\frac{G \pm P}{P} = \frac{100 \pm p}{p}$, što je ekvivalentno $\frac{G \pm P}{100 \pm p} = \frac{P}{p} = \frac{G}{100}$. Odatle sledi

$$G = \frac{(G \pm P) \cdot 100}{100 \pm p}, \; P = \frac{(G \pm P) \cdot p}{100 \pm p}, \; p = \frac{(100 \pm p) \cdot P}{G \pm P}.$$

Ukoliko se za procentnu stopu koristi decimalni zapis, iz početne proporcije $G:P=1:p$, zapisane u vidu razlomka $\frac{G}{P}=\frac{1}{p}$, dodavanjem (oduzimanjem) jedinice levoj i desnoj strani dobijamo $\frac{G}{P}\pm 1=\frac{1}{p}\pm 1$. Svođenjem na najmanji zajednički sadržalac, jednakost dobija oblik $\frac{G\pm P}{P}=\frac{1\pm p}{p}\Rightarrow\frac{G\pm P}{1\pm p}=\frac{P}{p}=G$, odakle se mogu izraziti $G=\frac{G\pm P}{1\pm p}$, $P=\frac{(G\pm P)\cdot p}{1\pm p}$, i $p=\frac{(1\pm p)\cdot P}{G\pm P}$.

Primer 3. Zajedno sa 18% poreza na promet, prodajna cena nekog proizvoda je 453,12 dinara. Izračunati nabavnu cenu i iznos poreza na promet.

Rešenje. Ako sa *G* obeležimo nabavnu cenu, a sa *P* iznos poreza na promet po stopi p = 0,18, tada je $G + P$ = 453,12.

Nabavnu cenu *G* izračunavamo po obrascu $G=\frac{G+P}{1+p}=\frac{453{,}12}{1{,}18}=384$.

Iznos poreza na promet dobijamo po obrascu $P=\frac{(G+P)\cdot p}{1+p}$

$=\frac{453{,}12\cdot 0{,}18}{1{,}18}=69{,}12$.

P smo mogli da izračunamo i iz $P = (G + P) - G$ = 453,12 – 384 = 69,12.

Primer 4. Posle pojeftinjenja za 12%, cena neke robe je 3102,32 dinara. Izračunati kolika bi bila cena da je roba poskupela za 12%.

Rešenje. $G - P$ = 3102,32 i p = 0,12, pa se cena robe pre pojeftinjenja izračunava po obrascu $G=\frac{G-P}{1-p}=\frac{3102{,}32}{0{,}88}=3526{,}36$. Da je umesto pojeftinjenja, roba poskupela za $p_1=12\%$, poskupljenje izračunavamo po obrascu

$P_1=G\cdot p_1=3526.36\cdot 0{,}12=423{,}1632$ pa bi povećana cena robe iznosila

$G+P_1=3526{,}36+423{,}1632=3949{,}5232$.

Primer 5. Posle poskupljenja po stopi od 15,6%, cena neke robe je 718 dinara. Izračunaj njenu cenu: a) posle poskupljenja od 26,3%; b) posle pojeftinjenja od 18,2%.

Rešenje. a) $p_1 = 0{,}156$, $G + P_1 = 718$, $p_2 = 0{,}263$ Cenu robe sa poskupljenjem od 26,3%, obeležićemo sa $G + P_2$ pa možemo postaviti proporciju

$718 : (G + P_2) = 1{,}156 : 1{,}263 \Rightarrow G + P_2 = 784{,}46$

b) $p_1 = 0{,}156$, $G + P_1 = 718$, $p_2 = 0{,}182$ Cenu robe sa pojeftinjenjem od 18,2%, obeležićemo sa $G - P_2$ pa možemo postaviti proporciju

$718 : (G - P_2) = 1{,}156 : (1 - 0{,}182) \Rightarrow G - P_2 = 508{,}07$ dinara.

Zadaci

1. Cena jednog litra mleka sa PDV-om od 20% iznosi 105 dinara. Koliki je iznos cene bez PDV-a? Koliko je procentualno učešće PDV-a u prodajnoj ceni robe?
2. Preduzeće je uplatilo svom dobavljaču 450 000 dinara bruto (zajedno sa PDV-om). Stopa PDV-a je 20%. Izračunati neto iznos.
3. Cena TNG-a je u decembru 2015. godine iznosila 79,90 dinara, a u junu 2016. godine 69,90 dinara. Koliko je procentualno cena snižena?
4. Cena TNG-a je u septembru 2016. godine iznosila 72,90 dinara. Početkom oktobra je povećana za 1 dinar, a sredinom oktobra za još jedan dinar i sada iznosi 74,90 dinara. Koliko u procentima iznosi prvo povećanje cene, a koliko drugo?
5. Cena mleka je porasla najpre za 5%, a zatim za 3% i sada iznosi 105 dinara. Koliko je iznosila cena pre prvog poskupljenja? Koliko je procentualno sadašnja cena mleka veća od cene pre prvog poskupljenja?
6. Cena jedne knjige je smanjena dva puta za po 10% i sada iznosi 399 dinara. Koliko je iznosila početna cena knjige?

8.2. Modeli kamatnog računa

K* – *kapital (ili glavnica) - ukupna suma koju poverilac daje dužniku, ili štediša ulaže na štednju.

p – ***kamatna stopa*** – predstavlja iznos koji dužnik godišnje plaća poveriocu na svakih 100 pozajmlnjenih jedinica. Izuražava se u procentima (p%) ili u decimalnom zapisu $p = \frac{p\%}{100}$.

I* – *interes (ili kamata) – predstavlja naknadu u novcu koja se plaća poveriocu za korišćenje pozajmljenih sredstava K, na vreme t, obračunata po kamatnoj stopi p.

t* – *vreme – računa se od dana pozajmljivanja do dana vraćanja kapitala i može se računati u godinama (t_g), mesecima (t_m) ili danima (t_d).

Vrednost kapitala na početku vremenskog perioda $t = t_0$ neke finansijske transakcije naziva se ***početna vrednost kapitala*** (ili sadašnja vrednost) i obično se obeležavamo sa K_0. Vrednost kapitala na kraju finansijske transakcije naziva se ***krajnja vrednost kapitala*** (ili buduća vrednost), i obeležava se sa K. Kako ona zavisi od vremena na koje je kapital uložen, K je funkcija od vremena $K = f(t)$. ***Kamata*** se izračunava kao razlika krajnje i početne vrednosti kapitala $I = K - K_0$.

Vrednost kapitala se tokom vremena "oplođuje" tj. raste i tu promenu nazivamo kapitalizacijom (***kapitalisanjem***) ili ukamaćivanjem.

Kod kamatnog računa postoje sledeće varijante računanja vremena:

- (30, 360) podrazumeva da je dužina svakog meseca 30 dana, a dužina godine 360 dana.
- (k, 360) dužina svakog meseca je kalendarska (realna), a za dužinu godine se uzima 360 dana.
- (k, 365) dužina svakog meseca je kalendarska (realna), a za dužinu godine se uzima 365 dana.

U praksi se primenjuju sledeći **modeli kamatnog računa**:

- **Prost kamatni račun** gde se kamata računa na istu osnovicu (početni kapital) po isteku vremena kapitalisanja, pri čemu je kamata proporcionalna iznosu kapitala K, kamatnoj stopi p i vremenu kapitalisanja t. Prost kamatni račun se po pravilu koristi kod kratkoročnih finansijskih transakcija čije je vreme trajanja ispod godinu dana, ali i kod obračunavanja zatezne kamate.
- Kod **složenog kamatnog računa**, kamata se računa za svaki obračunski period u toku vremena kapitalisanja. Početna vrednost kapitala, uvećana za kamatu predstavlja krajnju vrednost kapitala za posmatrani obračunski period i početnu vrednost kapitala za sledeći obračunski period. U svakodnevnom govoru se za složen kamatni račun, koristi izraz „kamata na kamatu“. Obračunski periodi mogu biti godišnji, polugodišnji, tromesečni (kvartalni), mesečni ili na neki drugi način utvrđeni. Vreme kapitalisanja mora da sadrži ceo broj obračunskih perioda.
- U slučaju kada broj obračunskih perioda nije ceo broj, primenjuje se **kombinovan složen i prost kamatni račun**.

Načini obračuna kamate kod složenog kapitalisanja:

- **dekurzivni** – kamata se zaračunava na početnu vrednost kapitala za posmatrani obračunski period, a isplaćuje se na kraju obračunskog perioda. Dekurzivna kamatna stopa obeležava se sa ***p***.
- **anticipativni** – kamata se zaračunava na krajnju vrednost kapitala za posmatrani vremenski period, a isplaćuje se unapred, na početku obračunskog perioda. Anticipativna kamatna stopa se obeležava sa ***q***.

8.2.1. Prost kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom

Kod prostog kamatnog računa sa dekurzivnom kamatnom stopom kamata se obračunava jednom, na kraju vremenskog perioda t. Osnovna proporcija kod prostog kamatnog računa je

$$K_0 : I = 100\% : pt$$

Ako je kapital K_0 uložen (plasiran) po stopi *p* na vreme *t* godina tada kapitalu K_0 odgovara procenat od 100%, kamati *I* odgovara procenat od *t·p %*. Kako se kamatna stopa obično zadaje na godišnjem nivou, vreme *t* mora biti izraženo u godinama. Iz osnovne proporcije se mogu izraziti početna vrednost kapitala K_0, kamata *I* dekurzivna kamatna stopa *p* i vreme *t*.

$$K_0 = \frac{100I}{p \cdot t}, \quad I = \frac{K_0 p \cdot t}{100}, \quad p = \frac{100I}{K_0 \cdot t}, \quad t = \frac{100I}{K_0 \cdot p}$$

Ukoliko je kamata izražena u decimalnom zapisu, osnovna proporcija prostog kamatnog računa dobija oblik

$$K_0 : I = 1 : pt$$

odakle je $I = K_0 \cdot p \cdot t$, $K_0 = \frac{I}{p \cdot t}$, $p = \frac{I}{K_0 \cdot t}$, $t = \frac{I}{K_0 \cdot p}$

Iz formula se vidi da je kamata direktno proporcionalna počenoj vrednosti kapitala (glavnici) K_0, kamatnoj stopi *p* i vremenu *t*. Krajnja vrednost kapitala *K* je zbir početne vrednosti kapitala K_0 i kamate *I*. $K = K_0 + I = K_0 + K_0 \cdot p \cdot t$

$$K = K_0(1 + pt)$$

Ako je vreme zadato u mesecima t_m onda *t* (vreme u godinama) izračunavamo po formuli $t = \frac{t_m}{12}$, ako je vreme dato u danima onda je $t = \frac{t_d}{360}$ ili $t = \frac{t_d}{365}$, što zavisi od varijante računanja vremena koja se primenjuje.

Primer 1. Koliku kamatu donosi kapital od 385 000 dinara, uložen na 3 meseca i 15 dana po godišnjoj dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12%, primenom varijante (30, 365)? Kolika je krajnja vrednost kapitala?

Rešenje.

$$K_0 = 385000,\ p = 12\% = 0{,}12,\ t_d = 3 \cdot 30 + 15 = 105,\ t = \frac{t_d}{365} = \frac{105}{365} = 0{,}28767$$

Kamata je $I = K_0 \cdot p \cdot t = K_0 \cdot p \cdot \frac{t_d}{365} = 385000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{105}{365} = 13290{,}411$ dinara, a

krajnja vrednost kapitala je $K = K_0 + I = 385000 + 13290{,}411 = 398290{,}411$ dinara.

Primer 2. Koliko iznosi godišnja dekurzivna kamatna stopa sa kojom je uložen kapital od 630 000 dinara na 3 godine i 5 meseci, ako je njegova vrednost porasla na 917 000 dinara.

Rešenje.

$K_0 = 630\,000,\ K = 917\,000,\ t_m = 3 \cdot 12 + 5 = 41,\ t = \frac{t_m}{12} = \frac{41}{12}$

$p = \frac{I}{K_0 \cdot t}$, pa moramo najpre da izračunamo kamatu.

Iz $K = K_0 + I$, kamata je $I = K - K_0 = 917\,000 - 630\,000 = 287\,000$

$$p = \frac{I}{K_0 \cdot t} = \frac{I}{K_0 \cdot \frac{41}{12}} = \frac{287000 \cdot 12}{630000 \cdot 41} = 0{,}1333$$

Kamatna stopa izražena u procentima je $p = 13{,}33\%$.

Primer 3. Koju sumu novca treba uložiti 23.04.2008. godine, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 12,6%, da bi 11.03.2009. godine vrednost uloženog novca iznosila 134 156 dinara? Koristiti varijantu za računanje vremena (*k*, 365).

Rešenje. $K_0 = ?$, K = 134 156, $t = 7 + 6 \cdot 31 + 3 \cdot 30 + 28 + 11 = 322$ dana (kad se koristi varijanta (*k*, 365) mora se računati realno broj dana u mesecu), p = 0,126.

K_0 računamo iz formule $K_0 = \dfrac{I}{p \cdot t}$, no kako nam kamata I nije poznata,

izrazićemo je kao $I = K - K_0 = 134156 - K_0$, pa je

$$K_0 = \frac{134156 - K_0}{p \cdot \frac{t_d}{365}} \Rightarrow K_0 \cdot p \cdot \frac{t_d}{365} = 134156 - K_0 \Rightarrow K_0\left(1 + p \cdot \frac{t_d}{365}\right) = 134156 \Rightarrow$$

$$K_0 = \frac{134156}{1 + p \cdot \frac{t_d}{365}} = \frac{134156}{1 + 0{,}126 \cdot \frac{322}{365}} \approx 120\,735{,}5$$

Primer 4. Kapital od 700 eura je uložen na štednju 23.07.2008. godine po stopi od 5,4% godišnje. Kog dana se može podići iznos od 1000 eura na ime glavnice sa kamatom uz (k, 365)?

Rešenje. $K_0 = 700$, $K = 1000$, $p = 0{,}054$, t = ? (vreme je u godinama)

$$I = K - K_0 = 1000 - 700 = 300 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{I}{K_0 \cdot p} = \frac{300}{700 \cdot 0{,}054} \approx 7{,}9365 \text{ godina.}$$

0,9365·365 dana ≈ 342 dana, pa je $t = 7$god. 342 dana. Posle sedam godina, datum je 23.07.2015. Do kraja 2015. godine ima još 8 + 3·31 + 2·30 = 161 dan. Ostaje još 342 – 161 = 181 dan u 2016. godini, što je nešto manje od pola godine. Zbir dana u prvih šest meseci 2016. godine je 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182 dana.

181. dan je 29. jun. Novac može da se podigne 182. dana, dakle 30. juna 2016. godine.

Primer 5. Na koje vreme treba uložiti 200 000 dinara, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 12,6% da bi se vrednost uloženog novca povećala za 10%?

Rešenje. $K_0 = 200\,000$, $I = K_0 \cdot 10\% = 0{,}1 \cdot 200\,000 = 20\,000$, $p = 12{,}6\% = 0{,}126$

$$t = \frac{I}{K_0 \cdot p} = \frac{20\,000}{200\,000 \cdot 0{,}126} = 0{,}79365 \text{ godina}$$

0,79365g ·365d = 289,68d ≈ 290d = 9 mes. 20 dana

8.2.2. Složen kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom

Kod složenog kamatnog računa sa dekurzivnom kamatnom stopom, kamata se računa na početnu vrednost kapitala, na kraju svakog obračunskog perioda. Pretpostavimo da je kapital K_0 (početna vrednost kapitala) uložen sa godišnjom dekurzivnom stopom p na vreme od t godina sa m kapitalisanja (obračunskih perioda) u toku jedne godine. Tada je kamatna stopa po jednom obračunskom periodu jednaka $\frac{p}{m}$ i ova stopa predstavlja tzv. **relativnu dekurzivnu kamatnu stopu (proporcionalna kamatna stopa)**. Ovakav način obračuna kamate u bankarstvu je poznat kao proporcionalni metod.

Na kraju prvog obračunskog perioda, nakon dodavanja kamate $I_1 = K_0 \frac{p}{m}$ početnoj vrednosti kapitala K_0, dobijamo da je krajnja vrednost kapitala:

$$K_1 = K_0 + I_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{m} = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right).$$

K_1 je krajnja vrednost kapitala za prvi obračunski period i početna vrednost kapitala za drugi obračunski period. Kamata za drugi obračunski period iznosi $I_2 = K_1 \frac{p}{m}$, pa je krajnja vrednost kapitala za drugi obračunski period:

$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{m} = K_1 \left(1 + \frac{p}{m}\right)$. Kako je $K_1 = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right)$, to je

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right)\left(1 + \frac{p}{m}\right) \Rightarrow K_2 = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right)^2.$$

Na kraju trećeg obračunskog perioda kamata $I_3 = K_2 \frac{p}{m}$ se dodaje početnoj vrednosti kapitala za treći obračunski period, K_2, pa je krajnja vrednost kapitala:

$$K_3 = K_2 + I_3 = K_2 + K_2 \frac{p}{m} = K_2\left(1+\frac{p}{m}\right). \text{ Kako je } K_2 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^2 \text{ to je}$$

$$K_3 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^2\left(1+\frac{p}{m}\right) \Rightarrow K_3 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^3.$$

Na osnovu ovih izračunavanja možemo izvući zaključak da je na kraju i-tog obračunskog perioda, krajnja vrednost kapitala:

$K_i = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^i$, gde je $i = 1, 2, 3, \cdots, tm$ (tm ukupan broj obračunskih perioda).

Nakon isteka vremena ukamaćivanja t, $i = tm$ **krajnja vrednost kapitala** je:

$$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}.$$

Ako obeležimo sa $r = 1+\frac{p}{m}$, tada je $K_{tm} = K_0 \cdot r^{tm}$.

Da bi mogao da se primeni složen kamatni račun, vreme t ne mora da predstavlja ceo broj godina, ali mora da sadrži ceo broj obračunskih perioda, tj tm mora da bude ceo broj.

Kamata se izračunava po formuli $I = K_{tm} - K_0$

Ako su poznate veličine K_{tm}, t, m i p, tada **početnu vrednost kapitala** K_0 dobijamo iz formule

$$K_0 = \frac{K_{tm}}{r^{tm}} = \frac{K_{tm}}{\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}}.$$

Ova vrednost predstavlja takozvanu **diskontovanu vrednost** kapitala K_{tm}.

Ako su poznate veličine K_0, K_{tm}, m i p, tada **nepoznato vreme ukamaćivanja *t*** dobijamo na sledeći način:

$$K_{tm} = K_0 \cdot r^{tm} \Rightarrow r^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow \log r^{tm} = \log\frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow tm\log r = \log\frac{K_{tm}}{K_0}.$$

$$t = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log r}$$

Na sličan način kad su poznati K_0, K_{tm}, m i t, **nepoznatu kamatnu stopu** $\boldsymbol{p}$

dobijamo iz $K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}$,

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow 1+\frac{p}{m} = \sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} \Rightarrow p = m\left(\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} - 1\right).$$

Primer 1. Izračunati koliku kamatu donosi kapital od 281300 dinara koji je uložen na štednju 3 godine i 9 meseci sa tromesečnim (kvartalnim) kapitalisanjem po godišnjoj dekurzivnoj stopi od 11,6%.

Rešenje. $K_0 = 281\,300$, t = 3 god. 9 mes., $m = \frac{12}{3} = 4$ obračunskih perioda godišnje,

p = 0,116 $\Rightarrow$ $tm = 3 \cdot 4 + \frac{9}{3} = 15$ obračunskih perioda ukupno.

$$I = K_m - K_0 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - K_0 = 281300\left(1+\frac{0{,}116}{4}\right)^{15} - 281300 = 150617{,}055$$

Primer 2. Koju sumu treba uložiti pa da ona za vreme od 3 godine po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 9% godišnje, sa mesečnim ukamaćivanjem, donese 386 300 dinara kamate.

Rešenje. I = 386 300, p = 0,09, t = 3, m = 12, $\Rightarrow$ tm = 3 · 12 = 36, $K_0 = ?$

$$I = K_{tm} - K_0 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - K_0 = K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right) \Rightarrow K_0 = \frac{I}{\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right)}$$

Pa je početna vrednost kapitala $K_0 = \dfrac{386\,300}{\left(\left(1+\dfrac{0{,}09}{12}\right)^{36}-1\right)} = 1\,251\,598{,}23$

a krajnja vrednost kapitala je

$K_{tm} = K_{36} = K_0 + I = 1\,251\,598{,}23 + 386\,300 = 1\,637\ \ 898{,}23$.

Primer 3. Odredi na koje vreme je uložena suma od 360 000 dinara sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 12% uz tromesečno kapitalisanje ako je ona narasla na 612 876 dinara.

Rešenje. $K_0 = 360\,000,\ p = 0{,}12,\ m = \dfrac{12}{3} = 4,\ r = 1 + \dfrac{p}{m} = 1{,}03,\ K_{tm} = 612\,876,\ t = ?$

$$t = \frac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r} = \frac{\log\dfrac{612876}{360000}}{4\cdot\log 1{,}03} = \frac{0{,}23107}{4\cdot 0{,}01284} = 4{,}5\ \text{godina},\ tm = 4{,}5\cdot 4 = 18.$$

Primer 4. Po kojoj stopi je uložen kapital od 94 600 dinara na vreme od 3 godine i 6 meseci uz mesečno dekurzivno ukamaćivanje, ako je on doneo 57 633 dinara kamate?

Rešenje. $K_0 = 94\,600,\ t = 3\,\text{god.}\,6\,\text{mes.}\ m = 12,\ tm = 3\cdot 12 + 6 = 42,\ I = 57\,633$

$K_{tm} = K_0 + I = 94\,600 + 57\,633 = 152\,233$

$$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm},\ \left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow 1+\frac{p}{m} = \sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} \Rightarrow p = m\left(\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}-1\right)$$

$$p = 12\left(\sqrt[42]{\frac{152233}{94600}}-1\right) = 12\left(1{,}6077^{\frac{1}{42}}-1\right) = 12(1{,}6077^{0{,}0238}-1) = 0{,}13637 = 13{,}6\%.$$

Preračunavanje kamatne stope sa jedne na drugu vrstu kapitalisanja

Razmatramo koji odnos između kamatnih stopa p_1 i p_2 mora da postoji da bi kapital K_0 uložen po stopi p_1 sa m_1 obračunskoh perioda godišnje, na kraju svake godine davao istu krajnju vrednost, tj donosio istu kamatu kao da je uložen po stopi p_2 sa m_2 kapitalisanja u toku godine. Iz uslova $K_{tm_1} = K_{tm_2}$

$$K_{tm_1} = K_{tm_2} \Rightarrow K_0\left(1+\frac{p_1}{m_1}\right)^{tm_1} = K_0\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{tm_2} \Rightarrow 1+\frac{p_1}{m_1} = \sqrt[tm_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{tm_2}} \Rightarrow$$

$$p_1 = m_1\left(\sqrt[m_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{m_2}} - 1\right) \text{ ili } p_1 = m_1\left(\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1\right)$$

Primer 5. Odredi kamatnu stopu koja će sa mesečnim kapitalisanjem donositi krajem svake godine kapitalu K_0 istu krajnju vrednost, kao da je uložen po stopi od 12,6% sa tromesečnim kapitalisanjem.

Rešenje. $p_1 = ?, m_1 = 12, p_2 = 0{,}126, m_2 = \frac{12}{3} = 4$

$$p_1 = m_1\left(\sqrt[m_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{m_2}} - 1\right) = 12\left(\left(1+\frac{0{,}126}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1\right) = 12\left(1{,}0315^{\frac{1}{3}} - 1\right) =$$

$$= 12\left(\sqrt[3]{1{,}0315} - 1\right) = 0{,}12469 = 12{,}47\%$$

Primer 6. Ako je godišnja dekurzivna kamatna stopa za oročenu štednju na jednu godinu 12%, izračunati odgovarajuće godišnje stope za a) mesečno, b) tromesečno kapitalisanje, tako da krajnja vrednost kapitala na kraju godine bude ista.

Rešenje. a) $p_1 = ?, m_1 = 12, p_2 = 0{,}12, m_2 = 1$

$$p_1 = 12 \cdot \left((1+0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1\right) = 0{,}11386 = 11{,}386\%.$$

b) $p_1 = ?, m_1 = 4, p_2 = 0{,}12, m_2 = 1$

$$p_1 = 4\left((1+0{,}12)^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 0{,}11495 = 11{,}495\%$$

Konformna kamatna stopa i odnos između relativne i komforne kamatne stope

Ako je 200 000 dinara uloženo sa godišnjom dekurzivna kamatna stopa p = 12% i kvartalnim kapitalisanjem, (broj obračunskih perioda godišnje je m = 4), relativna kamatna stopa, (kamatna stopa za jedan obračunski period) iznosi $\frac{p}{m} = 0{,}03$.

Vrednost kapitala na kraju prve godine iznosi

$$K_4 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^4 = 200\,000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^4 = 225\,101{,}762$$

a vrednost kamate je 25 101,762.

Da je kamata računata samo jednom na kraju godine, ona bi iznosila

$$I = K_0 \cdot p \cdot t = 200\,000 \cdot 0.12 \cdot 1 = 24\,000$$

a, kamati 25 101,762 u tom slučaju odgovara godišnja kamatna stopa

$$p = \frac{25101.762}{200000 \cdot 1} = 0{,}12550881 = 12{,}550881\%$$

Konformna kamatna stopa $p_{k,m}$ predstavlja stopu obračuna kamate po svakom od m obračunskih perioda u toku godine sa osobinom da je krajnja vrednost kapitala na kraju godine, bez obzira na broj obračunskih perioda, ista kao da je računata jednom na kraju godine po godišnjoj kamatnoj stopi p.

Formulu za izračunavanje konformne kamatne stope dobijamo iz prethodno definisanog uslova

$$K_m = K_0(1+p_{k,m})^m = K_0(1+p)$$

$$(1+p_{k,m})^m = 1+p$$

Rešavanjem ove jednačine po $p_{k,m}$ dobijamo

$$p_{k,m} = \sqrt[m]{1+p} - 1,$$

a rešavanjem po p dobijamo $p = (1+p_{k,m})^m - 1$. Ako se koristi konformna kamatna stopa $p_{k,m}$ onda se u formuli za izračunavanje krajnje vrednosti kapitala kod složenog kapitalisanja, relativna dekurzivna kamatna stopa $\frac{p}{m}$ zamenjuje konformnom kamatnom stopom $p_{k,m}$, pa je krajnja vrednost kapitala

$$K_{tm} = K_0\left(1+ p_{k,m}\right)^{tm}$$

Da bismo uočili razliku između relativne i komforne kamatne stope razmotrićemo nekoliko primera.

Primer 1. Neka je godišnja dekurzivna kamatna stopa p = 8% i m = 12. Tada je relativna kamatna stopa $\frac{p}{m} = \frac{0,08}{12} = 0,00667$, a konformna kamatna stopa je $p_{k,12} = \sqrt[12]{1+p} - 1 = \sqrt[12]{1,08} - 1 = 0,00643$. Ako se mesečnim ukamaćivanjem izračunaju odgovarajuće godišnje stope, relativnoj dekurzivnoj kamatnoj stopi 0,00643 odgovara godišnja dekurzivna kamatna stopa

$p' = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m - 1 = (1+0,00667)^{12} - 1 = 0,083\% = 8,3\%$, a komfornoj mesečnoj kamatnoj stopi odgovara godišnja dekurzivna kamatna stopa 8% . Razlika je 0,3% ukoliko se koristi relativna kamatna stopa i ekonomski nije opravdana.

Primer 2. Neka je godišnja kamatna stopa p= 15% i neka je m = 12. Relativna dekurzivna kamatna stopa će biti $\frac{p}{m} = \frac{0,15}{12} = 0,0125$, i ona mesečnim ukamaćivanjem daje godišnju stopu $p' = (1+0,0125)^{12} - 1 = 0,16075 = 16,075\%$ koja je bez nekog opravdanja veća za 1,075% od realne godišnje stope 15%. Konformna kamatna stopa $p_{k,12} = \sqrt[12]{1+0,15} - 1 = 0,01171$, daje mesečnim ukamaćivanjem godišnju stopu $p' = p$ = 15%.

Sa povećanjem kamatne stope p i broja obračunskih perioda m, razlika između godišnje dekurzivne kamatne stope (nominalne) p i stvarne (efektivne) p' se povećava.

8.2.3. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa dekurzivnom kamatnom stopom

U praksi se može desiti da se vreme ukamaćivanja ne poklapa sa celim brojem obračunskih perioda, pa se do krajnje vrednosti kapitala tada ne može doći samo primenom složenog kamatnog računa, već se mora kombinovati složen i prost kamatni račun.

Neka je kapital K_0 uložen po stopi p sa m obračunskih perioda godišnje na vreme t', gde $t'm$ nije ceo broj obračunskih perioda. Onda ćemo sa tm obeležiti ceo broj obračunskih perioda $(tm = [t'm])$, a preostali broj dana sa $t_d = t' - t$, t_d je manje od trajanja obračunskog perioda. Najpre se izračunava krajnja vrednost kapitala primenom složenog kamatnog računa za tm obračunskih perioda,

$K_{tm} = K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}$, a za preostalo vreme t_d, primenjuje se prost kamatni račun na osnovicu K_{tm}, tako da je **krajnja vrednost kapitala**

$$K_s = K_{tm} + K_{tm}\frac{p \cdot t_d}{365} = K_{tm}\left(1+\frac{p \cdot t_d}{365}\right)$$

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p \cdot t_d}{365}\right).$$

Primer 1. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 25 000 dinara uložen na vreme od 3godine i 246 dana uz tromesečno ukamaćivanje po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12,5% godišnje.

Rešenje. $K_0 = 25000,\ p = 0{,}125,\ t' = 3\text{god. }246\text{dana} = 3\text{g }8\text{ m }6\text{ d},\ m = 12/3 = 4,$

$tm = 3\cdot 4 + [8/2] = 14$, jer 246 dana sadraži 8 meseci odnosno dva obračunska perioda. Preostali broj dana je $t_d = 2\cdot 30 + 6 = 66$ dana, pa je krajnja vrednost kapitala

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) = 25000\left(1+\frac{0{,}125}{4}\right)^{14}\left(1+\frac{0{,}125\cdot 66}{365}\right) =$$

$$= 38462{,}32\cdot 1{,}0226 = 39331{,}568$$

Tražena kamata je $I = K_s - K_0 = 39331{,}568 - 25000 = 14331{,}568$ dinara.

Primer 2. Kolika je bila vrednost kapitala na dan 23.11.2004. godine ako je 12.06.2007. godine njegova vrednost iznosila 79 180 dinara. Kapital je uložen sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 9,36% i mesečnim ukamaćivanjem.

Rešenje. Vreme ukamaćivanja od 23.11.2004. do 12.06.2007. iznosi:

do kraja 2004. godine 8 dana (računa se i 23.11.) i 1 mesec,

do kraja 2006. godine 2 godine,

i u 2007. godini 5 meseci i 12 dana što ukupno iznosi t = 2 god. 6 mes. 20 dana.

Pošto se radi o mesečnom ukamaćivanju, $m = 12$, pa je $tm = 2\cdot 12 + 6 = 30$, a $t_d = 20$, što ukazuje da se radi o kombinovanom složenom i prostom kamatnom računu.

$p = 0{,}0936$, $K_s = 79180$, $K_0 = ?$

Iz $K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) \Rightarrow K_0 = \dfrac{K_s}{\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right)}$

Pa je početna vrednost kapitala

$$K_0 = \frac{79180}{\left(1+\frac{0{,}0936}{12}\right)^{30}\left(1+\frac{0{,}0936\cdot 20}{365}\right)} = \frac{79180}{1{,}2625\cdot 1.0051} = 62398{,}6 \text{ dinara.}$$

Izračunavanje vremena

Ako su poznate veličine: početna vrednost kapitala K_0, krajnja vrednost kapitala K_{tm}, godišnja dekurzivna kamatna stopa p i broj obračunskih perioda godišnje m, vreme se najpre izračunava po formuli koja se primenjuje kod složenog kamatnog računa $t' = \dfrac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}$. Ukoliko $t'm$ nije ceo broj, to znači da se radi o kombinovanom složenom i prostom kamatnom računu. Izračunava se *tm* tako što se odbacuje deo broja iza decimalnog zareza $tm = [t'm]$. Preostali broj dana t_d nije precizan i mora se preračunati iz formule

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right)$$

$$1+\frac{p\cdot t_d}{365} = \frac{K_s}{K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}} \Rightarrow \frac{p\cdot t_d}{365} = \frac{K_s}{K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}} - 1$$

$$t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right)$$

Traženo vreme je $t' = t + t_d$.

Primer 3. Na koje je vreme uložen kapital od 62 000 dinara uz mesečno ukamaćivanje po stopi od 9,36% godišnje ako je on doneo 16 780 dinara kamate?

Rešenje. K_0 = 62000, p = 0, 0936, I = 16780 m = 12, unapred ne znamo da li je u pitanju složen ili kombinovan složen i prost kamatni račun, pa ćemo za krajnju vrednost kapitala koristiti oznaku K_{tm}, $K_{tm} = K_0 + I = 62000 + 16780 = 78780$. Najpre računamo vreme po formuli za složeno kapitalisanje

$t' = \dfrac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r} = \dfrac{\log\dfrac{78780}{62000}}{12\cdot\log\left(1+\dfrac{0{,}0936}{12}\right)} = \dfrac{0{,}104}{0{,}0405} = 2{,}5679$, 0,5679·365 ≈ 207, pa je

t' = 2god. 207dana = 2god. 6mes. 27dana, tm = 2·12 + 6 = 30 (t = 2 god. 6 mes.) i imamo ostatak od 27 dana što nam govori da je u pitanju kombinovan kamatni račun, pa broj dana moramo preciznije preračunati po formuli

$$t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right) = \frac{365}{0{,}0936}\left(\frac{78780}{62000\left(1+\frac{0{,}0936}{12}\right)^{30}} - 1\right) =$$

$$= 3899{,}573\left(\frac{78780}{78274{,}862} - 1\right) = 25{,}165 \approx 25\text{dana},$$

traženo vreme je $t + t_d$ = 2god. 6mes. 25dana.

Primer 4. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 168 000 dinara na 3 godine i 136 dana, sa mesečnom konformnom kamatnom stopom koja odgovara godišnjoj dekurzivnoj kamatnoj stopi od 16%. Kolika bi bila razlika u kamatama da je umesto komforne korišćena relativna dekurzivna kamatna stopa?

Rešenje. K_0 = 168000, t' = 3god. 136 dana = 3god. 4mes. 16 dana, m = 12, p = 0,16

$tm = 3 \cdot 12 + 4 = 40$ (3god. 4mes.), t_d = 16

Zbog ostatka od 16 dana zaključujemo da je u pitanju model kombinovanog složenog i prostog ukamaćivanja.

Najpre izračunavamo komformnu kamatnu stopu

$$p_{k,m} = p_{k,12} = (1+p)^{12} - 1 = (1+0{,}16)^{12} - 1 = 0{,}01244\,.$$

Kamata je $I' = K_s' - K_0$. U formuli za izračunavanje krajnje vrednosti kapitala, $\frac{p}{m}$ zamenjujemo sa $p_{k,m}$.

$$I' = K_s' - K_0 = K_0\left(1+p_{k,m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) - K_0 = K_0\left(\left(1+p_{k,m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) - 1\right) =$$

$$168000\left((1+0{,}01244)^{40}\left(1+\frac{0{,}16\cdot 16}{365}\right) - 1\right) = 109406{,}39$$

Primenom ralativne kamatne stope $\frac{p}{m} = \frac{0{,}16}{12} = 0{,}0133 = 1{,}33\%$, dobijamo kamatu

$$I = K_s - K_0 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) - K_0 = K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right)-1\right)=$$

$$=168000\left((1+0{,}0133)^{40}\left(1+\frac{0{,}16\cdot 16}{365}\right)-1\right)=118989{,}74$$

Razlika kamata je $I - I' = 118989{,}74 - 109406{,}39 = 9583{,}35$ koju korisnik kapitala neopravdano plaća vlasniku kapitala.

8.2.4. Prost kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom

Za razliku od dekurzivnog načina gde se kamata obračunava na osnovicu koja predstavlja početnu vrednost kapitala za posmatrani obračunski period, kod anticipativnog načina, kamata se obračunava na osnovicu koja predstavlja krajnju vrednost kapitala. Zbog toga su pri istoj stopi kamate dobijene anticipativnim načinom obračuna veće i time nepovoljnije za korisnika od kamata dobijenih dekurzivnim načinom obračuna. Da bi razlikovali ova dva načina kapitalisanja, anticipativnu kamatnu stopu ćemo obeležavati sa *q*.

Anticipativni način obračuna kamate podrazumeva da se kamata računa na krajnju vrednost kapitala, a isplaćuje se unapred $I = Kqt$. Vreme je izraženo u godinama. U praksi kod pozajmljivanja novca, klijent dobija iznos umanjen za iznos kamate, a vraća ceo iznos novca. Do formule za krajnju vrednost kapitala dolazimo pomoću relacija $K = K_0 + I$ i $I = Kqt$.

$$K = K_0 + Kqt \Leftrightarrow K - Kqt = K_0 \Leftrightarrow K(1-qt) = K_0$$

$$K = \frac{K_0}{1-qt}$$

Odavde možemo izraziti početnu (diskontovanu vrednost kapitala) $K_0 = \frac{K}{1-qt}$.

Iz formule za izračunavanje kamate $I = Kqt$ možemo izraziti vreme i godišnju anticipativu kamatnu stopu $t = \frac{Kq}{I}$, $q = \frac{Kt}{I}$.

Primer. Klijentu je potrebna pozajmica od 3000 eura na šest meseci. Na zajam se primenjuje anticipativni način obračuna kamate po stopi 11,45%. Koliko novca klijent treba da pozajmi?

Rešenje. Kod ovakvog modela kamatnog računa, kamata se odbija odmah na početku. Zato klijent treba da pozajmi 3000 + *I*, da bi mu bilo isplaćeno 3000 eura.

$$K_0 = 3000, t_m = 6, t = \frac{t_m}{12} = 0{,}5, q = 11{,}45\% = 0{,}1145,$$

$$K = \frac{K_0}{1-qt} = \frac{3000}{1-0.145 \cdot 0.5} = 3234{,}5013477 \approx 3234{,}5014$$

Kad klijent pozajmi 3234,5014 eura, kamata 234,5014 eura će biti odmah odbijena, a klijentu će biti isplaćeno 3000 eura. Posle šest meseci klijent je dužan da vrati 3234,5014 eura. Kamata je obračunata na krajnju vrednost kapitala što možemo da proverimo $I = Kqt = 3234{,}5014 \cdot 0{,}145 \cdot 0{,}5 = 234{,}5013515 \approx 234{,}5014$

8.2.5. Složen kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom

Početna i krajnja vrednost kapitala

Neka je kapital K_0 uložen sa anticipativnom kamatnom stopom *q* i *m* kapitalisanja u toku godine, na vreme *t* godina, pri čemu *t* sadrži ceo broj obračunskih perioda. Kamatna stopa za jedan obračunski period (**relativna anticipativna kamatna stopa**) je $\frac{q}{m}$.

Obeležimo sa K_1 krajnju vrednost kapitala za prvi obračunski period. Kamata se zaračunava na krajnju vrednost kapitala i iznosi $I_1 = K_1 \frac{q}{m}$. Početna vrednost kapitala za prvi obračunski period dobija se oduzimanjem kamate I_1 od krajnje vrednosti kapitala za prvi obračunski period, tj.

$$K_0 = K_1 - I_1 = K_1 - K_1 \frac{q}{m} = K_1 (1 - \frac{q}{m}) \Rightarrow K_1 = \frac{K_0}{1 - \frac{q}{m}}.$$

Na taj način smo dobili formulu za krajnju vrednost kapitala za prvi obračunski period K_1.

Na isti način dobijamo formulu za krajnju vrednost kapitala za drugi obračunski period K_2

$$K_1 = K_2 - I_2 = K_2 - K_2 \frac{q}{m} = K_2 (1 - \frac{q}{m}) \Rightarrow K_2 = \frac{K_1}{1 - \frac{q}{m}} = \frac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^2}.$$

Za *i*-ti obračunski period, ova formula ima sledeći oblik

$$K_i = \frac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^i}, i = 1, 2, 3, \ldots, tm.$$

Onda će **krajnja vrednost kapitala** biti $K_{tm} = \dfrac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}}$.

Izraz $\dfrac{1}{1 - \frac{q}{m}} = \rho$ predstvlja **anticipativni kamatni činilac**. Krajnja vrednost kapitala izražena preko njega je $K_{tm} = K_0 \rho^{tm}$. Odavde se može izraziti **početna vrednost kapitala** $K_0 = K_{tm} \rho^{-tm}$ ili $K_0 = K_{tm} \left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}$

Takođe može se izraziti **vreme ukamaćivanja**

$$\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}=\frac{K_0}{K_{tm}}\Rightarrow \log\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}=\log\frac{K_0}{K_{tm}}\Rightarrow tm\log\left(1-\frac{q}{m}\right)=\log\frac{K_0}{K_{tm}}$$

$$t=\frac{\log\frac{K_0}{K_{tm}}}{m\log\left(1-\frac{q}{m}\right)},$$

.

i **anticipativna kamatna stopa**. $\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}=\frac{K_0}{K_{tm}}\Rightarrow 1-\frac{q}{m}=\sqrt[tm]{\frac{K_0}{K_{tm}}}$,

$$q=m\left(1-\sqrt[tm]{\frac{K_0}{K_{tm}}}\right).$$

Veza između anticipativne i dekurzivne kamatne stope

Vezu između anticipativne q i dekurzivne p kamatne stope ćemo odrediti iz uslova da su krajnje vrednosti kapitala koje donosi početni kapital K_0 za vreme t i m kapitalisanja godišnje, jednake.

Iz $K_{tm}=K'_{tm}\Rightarrow K_0\rho^{tm}=K_0r^{tm}\Rightarrow \rho=r\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\frac{q}{m}}=1+\dfrac{p}{m}\Leftrightarrow \dfrac{m}{m-q}=\dfrac{m+p}{m}$.

Odavde možemo izraziti anticipativnu kamatnu stopu preku dekurzivne

$$q=m-\frac{m^2}{m+p},$$

i obrnuto dekurzivnu kamatnu stopu preko anticipativne

$$p=\frac{m^2}{m-q}-m.$$

Premer 1. Koliku kamatu donosi kapital od 72 000 dinara sa godišnjom anticipativnom kamatnom stopom 13% za vreme od 2 godine i 3 meseca, mesečnim kapitalisanjem? Kolika je dekurzivna kamata pri istoj stopi 13%? Koliku dekurzivnu kamatnu stopu treba primeniti da bi se ostvarila ista kamata kao kod zadate anticipativne kamatne stope?

Rešenje. $K_0 = 72000$, $q = 0{,}13$, $t = 2$god.3mes., $m = 12$, $tm = 2 \cdot 12 + 3 = 27$

Anticipativna kamata je

$$I_a = K_{tm} - K_0 = \frac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}} - K_0 = K_0\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}} - 1\right).$$

$$I_a = 72000\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{0{,}13}{12}\right)^{27}} - 1\right) = 24617{,}71$$

Dekurzivna kamata je

$$I_d = K_0\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm} - K_0 = K_0\left(\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right) = 72000\left(\left(1 + \frac{0{,}13}{12}\right)^{27} - 1\right) = 24312{,}02$$

.

Da bi se dobila na kraju ista kamata kao kod anticipativnog načina kapitalisanja pri stopi od 13% potrebno je primeniti dekurzivnu kamatnu stopu

$$p = \frac{m^2}{m - q} - m = \frac{144}{12 - 0{,}13} - 12 = 13{,}14\%$$

8.2.6. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa anticipativnom kamatnom stopom

Kada se vreme ukamaćivanja ne poklapa sa celim brojem obračunskih perioda, za izračunavanje krajnje vrednosti kapitala kombinujemo složen i prost kamatni račun. Neka je kapital K_0 uložen po stopi q sa m obračunskih perioda godišnje na vreme t', gde $t'm$ nije ceo broj obračunskih perioda. Onda ćemo sa tm obeležiti ceo broj obračunskih perioda $\left(tm = [t'm]\right)$, a preostali broj dana sa $t_d = t' - t$, t_d je manje od trajanja obračunskog perioda. Najpre se izračunava krajnja vrednost kapitala primenom složenog kamatnog računa za tm obračunskih perioda,

$K_{tm} = \dfrac{K_0}{\left(1-\dfrac{q}{m}\right)^{tm}}$, a za preostalo vreme t_d, primenjuje se prost kamatni račun.

Kako se kod anticipativnog načina kamata računa na krajnju vrednost kapitala, primenićemo prost kamati račun na osnovicu K_s, tako da je **krajnja vrednost kapitala**

$$K_s = K_{tm} + K_s \frac{q \cdot t_d}{365} \Rightarrow K_s - K_s \frac{q \cdot t_d}{365} = K_{tm} \Leftrightarrow K_s \left(1 - \frac{q \cdot t_d}{365}\right) = K_{tm}$$

$$K_s = \frac{K_{tm}}{\left(1 - \dfrac{q \cdot t_d}{365}\right)} = \frac{K_0}{\left(1-\dfrac{q}{m}\right)^{tm}\left(1 - \dfrac{q \cdot t_d}{365}\right)}$$

Primer 1. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 25 000 dinara uložen na 3godine i 246 dana uz tromesečno ukamaćivanje sa anticipativnom kamatnom stopom 12,5% godišnje.

Rešenje. $K_0 = 25\,000, q = 0{,}125, t' = 3\text{god.}\,246\text{dana} = 3\text{g}\,8\,\text{m}\,6\,\text{d}, m = 12/3 = 4,$

$tm = 3 \cdot 4 + [8/2] = 14$, jer 246 dana sadraži 8 meseci odnosno dva obračunska perioda. Preostali broj dana je $t_d = 2 \cdot 30 + 6 = 66$ dana, pa je krajnja vrednost kapitala

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1-\dfrac{q}{m}\right)^{tm}\left(1 - \dfrac{q \cdot t_d}{365}\right)} = \frac{25\,000}{\left(1-\dfrac{0{,}125}{4}\right)^{14}\left(1 - \dfrac{0{,}125 \cdot 66}{365}\right)} = \frac{25\,000}{0{,}641157 \cdot 0{,}977397} =$$

$= 39\,893{,}7277$ Kamata iznosi $I = 39\,893{,}7277 - 25\,000 = 14\,893{,}7277$.

Izračunavanje vremena

Ako su poznate veličine: početna vrednost kapitala K_0, krajnja vrednost kapitala K_{tm}, godišnja anticipativna kamatna stopa q i broj obračunskih perioda godišnje *m*, vreme se najpre izračunava po formuli koja se primenjuje kod složenog kamatnog računa $t' = \dfrac{\log \dfrac{K_0}{K_{tm}}}{m \log\left(1 - \dfrac{q}{m}\right)}$. Ukoliko $t'm$ nije ceo broj, to znači da se radi o kombinovanom složenom i prostom kamatnom računu. Izračunava se *tm* tako što se odbacuje deo broja iza decimalnog zareza $tm = [t'm]$. Preostali broj dana t_d nije precizan i mora se preračunati iz formule

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1 - \dfrac{q}{m}\right)^{tm}\left(1 - \dfrac{q \cdot t_d}{365}\right)} \Rightarrow 1 - \frac{q \cdot t_d}{365} = \frac{K_0}{K_s\left(1 - \dfrac{q}{m}\right)^{tm}}$$

$$t_d = \frac{365}{q}\left(1 - \frac{K_0}{K_s\left(1 - \dfrac{q}{m}\right)^{tm}}\right)$$

Traženo vreme je $t' = t + t_d$.

Primer 3. Na koje je vreme uložen kapital od 62 000 dinara uz mesečno ukamaćivanje po anticipativnoj stopi od 9,36% godišnje ako je on doneo 16 780 dinara kamate?

Rešenje. K_0 = 62000, p = 0, 0936, I = 16780 m = 12, unapred ne znamo da li je u pitanju složen ili kombinovan složen i prost kamatni račun, pa ćemo za krajnju vrednost kapitala koristiti oznaku K_{tm}, $K_{tm} = K_0 + I = 62000 + 16780 = 78780$. Najpre računamo vreme po formuli za složeno kapitalisanje

$$t' = \frac{\log \frac{K_0}{K_{tm}}}{m \log\left(1 - \frac{q}{m}\right)} = \frac{\log \frac{62\,000}{78\,780}}{12 \log\left(1 - \frac{0.0936}{12}\right)} = \frac{-0{,}104024}{12 \cdot (-0{,}003401)} = 2{,}548858$$

$0{,}548858 \cdot 365 = 200{,}333 \approx 200$, pa je $t' =$ 2god. 200dana = 2god. 6mes. 20dana, $tm = 2 \cdot 12 + 6 = 30$ (t = 2 god. 6 mes.) i imamo ostatak od 20 dana. To znači da je u pitanju kombinovan kamatni račun, pa broj dana moramo preciznije preračunati po formuli

$$t_d = \frac{365}{q}\left(1 - \frac{K_0}{K_s\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}}\right) = \frac{365}{0{,}0936}\left(1 - \frac{62000}{78780\left(1 - \frac{0{,}0936}{12}\right)^{30}}\right)$$

$$t_d = 3899{,}573\left(1 - \frac{62000}{62286{,}3178}\right) = 17{,}9057 \approx 18 \,\text{dana}$$

traženo vreme je $t' = t + t_d$ = 2god. 6mes. 18dana.

Pitanja i zadaci

1. Koji modeli kamatnog računa postoje i po čemu se razlikuju?
2. Nabroj načine obračuna kamate i objasni.
3. Dužnik je platio račun od 20 000 dinara sa zakašnjenjem od 10 dana. Zatezna godišnja kamatna stopa iznosi 19,25%. Izračunati zateznu kamatu i ukupan iznos koji je dužnik platio.
4. Dužnik nije platio svoj dug u iznosu od 5.000 evra 28.12.2015. već 27.03.2016. godine. Izračunati zateznu kamatu, ako se za primenjuje godišnja kamatna stopa 8,75%.
5. Klijent je uložio 1000 eura na štednju na period od 36 meseci sa godišnjom kamatnom stopom 1,2%. Banka primenjuje konformni način obračuna kamate. Na ostvarenu kamatu, klijent je dužan da plati 15% poreza. Za koliko je klijent uvećao vrednost svog kapitala?

6. Klijent je oročio 10 000 eura na 36 meseci. Posle isteka tog perioda, klijent je podigao 10 258,54 eura. Koliku je efektivnu kamatnu stopu primenila banka?
7. Na koje vreme treba uložiti kapital od 2000 eura uz polugodišnje kapitalisanje i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 7,58% da bi se njegova vrednost udvostručila.
8. Na koje vreme je uložen kapital od 96480 dinara uz tromesečno kapitalisanje sa dekurzivnom kamatnom stopom od 10,2% ako je narastao na 140757,7 dinara (30, 360)?
9. Koliku kamatu donosi kapital od 56000 dinara uložen na 2 godine 9 meseci i 16 dana, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 9,12% i polugodišnjim kapitalisanjem? Koliku kamatu bi doneo da je uložen pod istim uslovima sa anticipativnom kamatnom stopom 9,12%?
10. Na koji vreme treba uložiti kapital od 150 000 dinara sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 6,18% i kvartalnim kapitalisanjem da bi se njegova vrednost uvećala za trećinu?
11. Na koje vreme treba uložiti 5000 eura sa
    a) godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 1,2%
    b) godišnjom anticipativnom kamatnom stopom od 1,2%

    i tromesečnim kapitalisanjem tako da njegova vrednost poraste za 5%?
12. Na koje vreme treba uložiti 4000 eura sa
    a) godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 1,6%,
    b) godišnjom anticipativnom kamatnom stopom od 1,6%,

    i polugodišnjim kapitalisanjem tako da njegova vrednost poraste za 10%?
13. Odrediti kamatu koju donosi kapital od 18000 eura za vreme od 2godine i 128 dana tromesečnim kapitalisanjem uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 7,25%. Koliku bi kamatu doneo da je umesto relativne primenjena odgovarajuća konformna kamatna stopa?

14. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 200000 dinara, uložen na 7 godina 8 meseci i 10 dana uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 18% i polugodišnje kapitalisanje. Kolika bi bila kamata da je umesto relativne primenjena odgovarajuća konformna kamatna stopa?
15. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 60000 dinara uložen na 2 godine i 236 dana uz tromesečno kapitalisanje sa anticipativnom kamatnom stopom od 11,212%. Sa kolikom dekurzivnom kamatnom stopom bi taj kapital doneo istu kamatu?
16. Koliku kamatu donosi kapital od 8000 eura uložen na 2 godine i 226 dana sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 1,9% i polugodišnjim kapitalisanjem? Koliku bi kamatu doneo da je uložen pod istim uslovima sa anticipativnom kamatnom stopom od 1,9%? Koja kamata je veća i za koliko?

8.3. Krediti

U nedostatku sopstvenih sredstava, subjekat se pozajmljuje kod drugih subjekata koji ta novčana sredstva poseduju. Tako nastaju kreditni odnosi između dužnika i poverioca. Obaveza dužnika je da pozajmljeni novac zajedno sa dogovorenom kamatom vrati poveriocu za određeno vreme, kroz određeni broj rata (anuiteta). **Anuiteti** (a) se sastoje iz dva dela: **otplate** (σ) i **kamate** (I) $a = \sigma + I$. Otplatom sadržanom u anuitetu se otplaćuje zajam. Kamata se uvek računa na preostali deo duga za određeni vremenski period (između dva anuiteta). Anuiteti mogu biti konstantni (isti) tokom celog perioda otplate kredita, ili mogu biti promenljivi (da opadaju ili rastu), što zavisi od ugovorenog načina otpale kredita. Vraćanje (otplata) kredita se naziva amortizacija.

Pretpostavićemo da je vremenski razmak između dva anuiteta konstantan i da se poklapa sa periodom kapitalisanja zajma, pri čemu se anuiteti isplaćuju na kraju obračunskog perioda.

8.3.1. Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom

Izračunavanje anuiteta i kamata sadržanih u anuitetima

Kod ove metode amortizacije kredita, otplata kredita je konstantna u svakom anuitetu, dok su kamate sadržane u anuitetima i sami anuiteti promenljivi.

$$a_i = \sigma + I_1$$

Kamata se zaručanava na ostatak duga, pa je najveće učešće kamate u prvom anuitetu, a najmanje u poslednjem, $I_1 > I_2 > \cdots > I_n$. Kako je učešće otplate isto u svim anuitetima, najveći je prvi anuitet, a najmanji poslednji, $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$.

Pretpostavimo da je dužnik uzeo kredit u iznosu od K novčanih jedinica, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom p na vreme t godina sa m anuiteta u toku jedne godine (pri čemu t sadrži ceo broj anuiteta). Broj anuiteta je $n = tm$, pa kako je otplata konstantna ona iznosi $\sigma = \frac{K}{n}$. Vremenski razmak između dva anuiteta je $\frac{12mes}{m}$ pa je relativna kamatna stopa $\frac{p}{m}$. S obzirom da dužnik vraća prvi anuitet tek na kraju prvog obračunskog perioda, kamata sadržana u prvom anuitetu se računa na ukupnu vrednost duga, pa je $I_1 = K\frac{p}{m}$ što znači da je vrednost prvog anuiteta $a_1 = \sigma + I_1 = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}$, a stanje duga nakon isplaćenog prvog anuiteta je $S_1 = K - \sigma = K - \frac{K}{n} = K\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Kamata sadržana u drugom anuitetu računa se na stanje duga (iznos duga) S_1 posle isplaćenog prvog anuiteta, pa je $I_2 = S_1\frac{p}{m} = K\frac{p}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$,

odakle je $a_2 = \sigma + I_2 = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, a ostatak duga nakon vraćenog drugog anuiteta je $S_2 = K - 2 \cdot \sigma = K - 2 \cdot \frac{K}{n} = K\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Na osnovu svega navedenog lako je zaključiti da je stanje duga posle vraćanja *i*-tog anuiteta $S_i = K - i \cdot \sigma = K - i \cdot \frac{K}{n} = K\left(1 - \frac{i}{n}\right)$, za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Kako se kamata I_i sadražana u *i*-tom anuitetu računa na stanje duga nakon vraćenog *i*-1. anuiteta, tj. na stanje duga S_{i-1}, to je

$I_i = S_{i-1} \cdot \frac{p}{m} = \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)$ za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Vrednost *i*-tog anuiteta je $a_i = \sigma + I_i = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)$ za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Vraćeni deo duga posle *i*-tog anuiteta je $Q_i = i \cdot \sigma = \frac{i \cdot K}{n}$.

Ukoliko se umesto relativne dekurzivne kamatne stope primeni konformna kamatna stopa $p_{k,m}$, u svim obrascima se $\frac{p}{m}$, zamenjuje sa $p_{k,m}$.

Primer 1. Ako se kredit od 38 960 dinara amortizuje metodom jednakih otplata za 2 godine i 3 meseca mesečnim anuitetima po godišnjoj stopi od 8,6%, izračunati kamatu sadržanu u osmom anuitetu, vrednost 15. anuiteta, vraćeni deo duga posle 20. anuiteta i stanje duga posle 12. anuiteta.

Rešenje. K = 38 960, t = 2god. 3mes. m = 12, p = 0,086, $n = tm = 2\cdot 12 + 3 = 27$,

otpalata je $\sigma = \frac{K}{n} = \frac{38960}{27} = 1442{,}963$

$$I_i = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \Rightarrow I_8 = \frac{38960\cdot 0{,}086}{12}\left(1-\frac{8-1}{27}\right) = 206{,}825$$

$$a_i = \frac{K}{n} + \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \Rightarrow a_{15} = \frac{38960}{27} + \frac{38960\cdot 0{,}086}{12}\left(1-\frac{14}{27}\right) =$$

$$= 1442{,}963 + 134{,}436 = 1577{,}399$$

$$Q_i = \frac{i\cdot K}{n} \Rightarrow Q_{20} = \frac{20\cdot 38960}{27} = 28859{,}259$$

$$S_i = K - i\cdot\sigma \Rightarrow S_{12} = 38960 - 12\cdot 1442{,}963 = 21644{,}444\,.$$

Izračunavanje ukupne kamate

Ukupna kamata koju dužnik vraća u toku amortizacije kredita jednaka je zbiru kamata sadržanih u svim anuitetima, pa je

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) = \frac{K\cdot p}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$$

$$I = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{0}{n}+1-\frac{1}{n}+1-\frac{2}{n}+\ldots+1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{K\cdot p}{m}\left(n\cdot 1-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{K\cdot p}{m}\left(n-\frac{1}{n}(1+2+\ldots+(n-1))\right)$$

$1+2+\ldots+(n-1)$ predstavlja zbir $n-1$ članova aritmetičkog niza čiji je prvi član $b_1=1$, $d=1$ i poslednji član $b_{n-1}=n-1$. Ovaj zbir izračunavamo po formuli $S_n=\frac{n}{2}(b_1+b_n)$, odakle dobijamo da je

$$1+2+\ldots+n-1=\frac{n-1}{2}(1+(n-1))=\frac{n(n-1)}{2}$$, pa je

$$I=\frac{K\cdot p}{m}\left(n-\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)=\frac{K\cdot p(n+1)}{2m}.$$

Primer 2. Izračunati ukupnu kamatu koja se dobija amortizacijom kredita metodom jednakih otplata i tromesečnim anuitetima po stopi od 12,5% za vreme od 5 godina ako je kamata sadržana u 12. anuitetu 132 dinara.

Rešenje. m = 12/3 = 4, p = 0,125, t = 5god., n = tm = 5·4 = 20, I = ?

kako je $I=\frac{K\cdot p(n+1)}{2m}$, nepoznato K ćemo odrediti iz I_{12} = 132.

$$I_i=\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{K\cdot p}{m}\cdot\frac{n-i+1}{n}$$

$$K=\frac{I_i\cdot m\cdot n}{p(n-i+1)}=\frac{132\cdot 4\cdot 20}{0{,}125\cdot(20-12+1)}=9386{,}667$$

$$I=\frac{9386{,}667\cdot 0{,}125\cdot(20+1)}{2\cdot 4}=3080$$

Analiza amortizacije kredita metodom jednakih otplata i amortizacioni plan

Polazeći od obrasca za kamatu $I_i=\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$, uporedimo uzastopne članove I_i i I_{i+1} niza $I_1, I_2, \cdots, I_i, \cdots, I_n$.

Kako je

$$I_{i+1}-I_i=\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i+1-1}{n}\right)-\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)=-\frac{K\cdot p}{mn}<0\Rightarrow I_{i+1}<I_i$$ što znači

da se kamata iz anuiteta u anuitet smanjuje, tj niz $I_1, I_2, \cdots, I_i, \cdots, I_n$ je monotono opadajući. To je logično jer se kamate računaju na ostatak duga koji je sve manji i manji.

Polazeći od formule kojom se izračunavaju anuiteti $a_i = \sigma + I_i = \dfrac{K}{n} + I_i$, dobijamo

$a_{i+1} - a_i = \dfrac{K}{n} + I_{i+1} - \left(\dfrac{K}{n} + I_i\right) = I_{i+1} - I_i < 0 \Rightarrow a_{i+1} < a_i$, što znači da se i anuiteti pri amortizaciji kredita ovom metodom smanjuju, pa je dužnik nominalno najviše opterećen prvim anuitetom.

U praksi se zbog bolje evidencije, što je od značaja i za poverica i za dužnika, pravi takozvani amortizacioni plan u vidu tabele što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3. Napraviti plan amortizacije kredita od 10 000 eura metodom jednakih otplata sa deset tromesečnih anuiteta i godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 7,5%.

Redni broj anuiteta (*i*)	**Otplata**	**Kamata**	**Anuitet**	**Stanje duga**
	$\sigma = \dfrac{K}{n}$	$I_i = S_{i-1}\dfrac{p}{m}$	$a_i = \sigma + I_i$	$S_i = K - i \cdot \sigma$
1	1000	187,50	1187,50	9000
2	1000	168,75	1168,75	8000
3	1000	150,50	1150,50	7000
4	1000	131,25	1131,25	6000
5	1000	112,50	1112,50	5000
6	1000	93,75	1093,75	4000
7	1000	75,00	1075,00	3000
8	1000	56,25	1056,25	2000
9	1000	37,50	1037,50	1000
10	1000	18,75	1018,75	0
Σ	10000 = K	1031,75	11031,75	

Najpre izračunavamo otpaltu $\sigma = \frac{K}{n} = \frac{10000}{10} = 1000$ i popunjavamo drugu i petu kolonu, $S_1 = K - \sigma = 10000 - 1000 = 9000, S_2 = K - 2\sigma = 10000 - 2000 = 8000$ i tako dalje $S_9 = 1000, S_{10} = 0$. Nakon toga izračunavamo kolonu za kamate po formuli $I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$. p = 0,075, m = 12/3 = 4, $\frac{p}{m} = \frac{0{,}075}{4} = 0{,}01875$

pa je $I_1 = S_0\frac{p}{m} = 10000 \cdot 0{,}01875 = 187{,}5$

$I_2 = S_1\frac{p}{m} = 9000 \cdot 0{,}01875 = 168{,}75$ itd. Dobijeni rezultati se unose u kolonu za kamate. Kako je $a_i = \sigma + I_i$, kolonu anuiteta dobijamo sabiranjem vrednosti u kolonama otpalte i kamate.

Kontrola.Treba proveriti da li je zbir svih kamata jednak vrednosti koja se dobija po formuli za ukupnu kamatu $I = \frac{K \cdot p \cdot (n+1)}{2m}$, i da li je zbir druge i treće kolone jednak zbiru četvrte kolone.

Razmatrajući odnos relativne i konformne kamate primetili smo da je ekonomski opravdano koristiti konformnu umesto relativne kamate. Ako u prethodnim formulama umesto relativne $\frac{p}{m}$ upotrebimo konformnu kamatu $p_{k,m}$, formule će dobiti oblik

$$I_i = K \cdot p_{k,m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right),\ a_i = \frac{K}{n} + K \cdot p_{k,m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right), I = \frac{K \cdot p_{k,m} \cdot (n+1)}{2}.$$

Primer 4. Kredit od 180 000 dinara amortizuje se mesečno metodom jednakih otplata sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 27% za period od dve godine i šest meseci. Izračunaj vrednost prvog i poslednjeg anuiteta i ukupnu kamatu. Kolika bi bila ukupna kamata da je umesto relativne primenjena odgovarajuća konformna kamatna stopa?

Rešenje: $K = 180000,\ p = 27\% = 0{,}27, t = 2\text{god.}\,6\text{mes.}\, m = 12, n = 2\cdot 12 + 6 = 30$

$$a_i = \sigma + I_i\,,\ \sigma = \frac{K}{n} = \frac{180000}{30} = 6000,\ I_i = \frac{K\cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right),$$

$I_1 = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{1-1}{n}\right) = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{0}{n}\right) = \frac{K\cdot p}{m}$ dobili smo formulu za izračunavanje učešća kamate u prvom anuitetu $I_1 = \frac{K\cdot p}{m} = \frac{180000\cdot 0{,}27}{12} = 15000\cdot 0{,}27 = 4050$

prvi anuitet iznosi $a_1 = \sigma + I_1 = 6000 + 4050 = 10050$,

i formulu za izračunavanje učešća kamate u *n*-tom (poslednjem) anuitetu

$$I_n = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{K\cdot p}{m}\cdot\frac{n-n+1}{n} = \frac{K\cdot p}{m\cdot n}$$

$$I_{30} = \frac{180000\cdot 0{,}27}{12}\left(1-\frac{30-1}{30}\right) = 4050\left(1-\frac{29}{30}\right) = 4050\frac{1}{30} = 135,$$

poslednji anuitet iznosi $a_{30} = \sigma + I_{30} = 6000 + 135 = 6035$

ukupna kamata je

$$I = \frac{K\cdot p(n+1)}{2m} = \frac{180000\cdot 0{,}27(30+1)}{2\cdot 12} = \frac{15000\cdot 0{,}27\cdot 31}{2} = 7500\cdot 8{,}37 = 62775$$

$$p_{k,m} = \sqrt[m]{p+1} - 1 = \sqrt[12]{0.27+1} - 1 = 0.0201177 \approx 0.02012$$

Ukupna kamata primenom konformne kamatne stope

$$I_k = \frac{K\cdot p_{km}(n+1)}{2} = \frac{180000\cdot 0{,}02012(30+1)}{2} = 56134.8$$

8.3.2. Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom

Pri amortizaciji kredita metodom jednakih anuiteta, dužnik je nominalno jednako opterećen u svim periodima otpalte kredita. Otplate i kamate su promenljive veličine $a = \sigma_i + I_i$. Kamata se računa na ostatak duga, pa je najveće učešće kamate u prvom anuitetu, a najmanje u poslednjem, $I_1 > I_2 > \cdots > I_n$. Kako su anuiteti jednaki, za otplate važi obrnuto. Najmanje je učešće otplate u prvom anuitetu, a najveće u poslednjem, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_n$.

Pretpostavimo da se kredit od *K* novčanih jedinica amortizuje za period od *t* godina sa *m* anuiteta godišnje po dekurzivnoj godišnjoj kamatnoj stopi *p*. Obeležimo sa $r = 1 + \frac{p}{m}$ ukoliko se koristi relativna kamatna stopa, ili $r = 1 + p_{k,m}$ ukoliko se koristi konformna kamatna stopa.

Metodologija izračunavanja se zasniva na sledećem:

Posmatramo *i*-ti anuitet. Vrednost anuiteta je $a = \sigma_i + I_i$, kamata se računa na ostatak duga koji u tom periodu iznosi S_{i-1}, pa je kamata $I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$.

Učešće otplate u *i*-tom anuitetu je $\sigma_i = a - I_i = a - S_{i-1}\frac{p}{m}$.

Stanje duga nakon vraćenog *i*-tog anuiteta S_i dobijamo kada od stanja duga S_{i-1} oduzmemo vrednost *i*-te otplate, pa je

$$S_i = S_{i-1} - \left(a - S_{i-1}\frac{p}{m}\right) = S_{i-1} - a + S_{i-1}\frac{p}{m} = S_{i-1}\left(1 + \frac{p}{m}\right) - a, i = 1, 2, \ldots, n \quad n = tm,$$

Polazeći od ove formule, stanje duga nakon vraćenog prvog anuiteta je

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{p}{m}\right) - a$$

$S_0 = K$ jer kod obračuna prvog anuiteta, klijent duguje ceo iznos kredita, pa je

$$S_1 = K\left(1+\frac{p}{m}\right) - a = Kr - a .$$

Stanje duga posle vraćenog drugog anuiteta je

$$S_2 = S_1\left(1+\frac{p}{m}\right) - a = S_1 r - a = (Kr-a)r - a = Kr^2 - ar - a$$

Stanje duga posle vraćenog trećeg anuiteta je

$$S_3 = S_2\left(1+\frac{p}{m}\right) - a = S_2 r - a = (Kr^2 - ar - a)r - a = Kr^3 - ar^2 - ar - a$$

Na osnovu izraza za $S_1, S_2,$ i S_3, zaključujemo da je stanje duga posle vraćenog i-tog anuiteta

$$S_i = K\cdot r^i - ar^{i-1} - ar^{i-2} - \ldots . ar - a = K\cdot r^i - a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1})$$

$1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1}$ predstavlja zbira prvih $i - 1$ članova geometrijske progresije čiji je prvi član $b_1 = 1$, $q = r$. Zbir prvih n članova geometrijske progresije se izračunava po formuli

$\mathrm{Z_n} = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$, pa je $1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1} = 1\cdot \dfrac{r^i - 1}{r-1} = \dfrac{r^i-1}{r-1}$, tako da za S_i

dobijamo $S_i = K\cdot r^i - a\dfrac{r^i - 1}{r-1}$ za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

$S_n = 0$, jer je nakon isplate poslednjeg n-tog anuiteta dužnik isplatio dug.

$$S_n = 0 \Rightarrow K\cdot r^n - a\frac{r^n - 1}{r-1} = 0 \Rightarrow a = K\cdot r^n \cdot \frac{r-1}{r^n - 1} = K\cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}}$$

Dakle formula za izračunavanje anuiteta kod modela kredita sa jednakim anuitetima je $a = K\cdot \dfrac{r-1}{1-r^{-n}}$.

Izraz $\dfrac{r-1}{1-r^{-n}}$ predstavlja procentualno učešće anuiteta u celom kreditu. Ako a zamenimo u formuli za S_i dobićemo

$$S_i = K\cdot r^i - K\cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}}\cdot \frac{r^i - 1}{r-1} = K\cdot r^i - K\cdot r^n \cdot \frac{r^i - 1}{r^n - 1} = K\cdot \frac{r^i(r^n - 1) - r^n(r^i - 1)}{r^n - 1}$$

$\Rightarrow S_i = K\dfrac{r^n - r^i}{r^n - 1}$. Ovom formulom se na osnovu *K*, *t*, *m* i *p* izračunava stanje duga S_i nakon vraćenog *i*-tog anuiteta, za svako *i* = 1, 2, 3, . . . , *n*.

Ako *K* treba izraziti preko *a* ili preko S_i, onda se iz prethodnih formula dobija

$K = a \cdot \dfrac{1 - r^{-n}}{r - 1}$, odnosno $K = S_i \cdot \dfrac{r^n - 1}{r^n - r^i}$. Direktnu vezu između *a* i S_i dobijamo izjednačavanjem ovih formula za *K*.

$$a \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = S_i \cdot \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \Rightarrow a = S_i \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} = S_i \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$\Rightarrow a = S_i \frac{r^n (r - 1)}{r^n - r^i} \text{ i } S_i = a \frac{r^n - r^i}{r^n (r - 1)}.$$

Ukupna kamata pri amortizaciji kredita ovom metodom je razlika svih vraćenih anuiteta i uzetog kredita $I = n \cdot a - K$.

Primer 4. Kredit od 368 000 dinara se amortizuje metodom tromesečnih jednakih anuiteta po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12,6% za vreme od 6 godina i 9 meseci. Izračunati anuitet, stanje duga posle jedne godine i ukupnu kamatu.

Rešenje. *K* = 36 8000, *m* = 12/3 = 4, *p* = 0,126, *t* = 6god. 9mes., $a = ?, S_4 = ?$

n = *tm* = 6·4 + 9/3 =27, $r = 1 + \dfrac{0{,}126}{4} = 1{,}0315$

Anuitet računamo po formuli

$$a = K \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} \Rightarrow a = 368000 \cdot \frac{1{,}0315 - 1}{1 - 1{,}0315^{-27}} = 20438{,}797$$

Posle jedne godine, plaćeno je 4 anuiteta, pa je stanje duga S_4.

$$S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1} \Rightarrow S_4 = 368000 \cdot \frac{1{,}0315^{27} - 1{,}0315^4}{1{,}0315^{27} - 1} = 330\,905{,}3785$$

Ukupnu kamatu računamo po formuli *I* = *na* – *K*= 27·20438,797 – 368000 = 183847,519.

Učešće kamate i otplate u *i*-tom anuitetu

Kamata sadržana u *i*-tom anuitetu računa se na stanje duga nakon vraćenog prethodnog $i - 1$. anuiteta, pa je

$I_i = S_{i-1}\dfrac{p}{m}$, ili kako je $r = 1 + \dfrac{p}{m} \Rightarrow \dfrac{p}{m} = r - 1$ kamata se može izraziti

$$I_i = K(r-1)\frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}.$$

Kakao je $a = \sigma_i + I_i \Rightarrow \sigma_i = a - I_i$ kad ovde zamenimo I_i dobijamo formulu za *i*-tu otplatu

$$\sigma_i = K\frac{r-1}{1-r^{-n}} - K(r-1)\frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1} = K(r-1)\left(\frac{1}{1-r^{-n}} - \frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}\right) =$$

$$= K(r-1)\left(\frac{r^n}{r^n - 1} - \frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}\right) = K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n - 1}.$$

i-tu otplatu možemo izraziti i drugačije $\sigma_i = K(r-1)\dfrac{r^{i-1}}{r^n - 1} = r^{i-1}K(r-1)\dfrac{r^{-n}}{1-r^{-n}}$

$$= r^{i-1}K(r-1)\frac{1-1+r^{-n}}{1-r^{-n}} = r^{i-1}K(r-1)\left(\frac{1}{1-r^{-n}} - \frac{1-r^{-n}}{1-r^{-n}}\right) =$$

$$= r^{i-1}\left(K\frac{r-1}{1-r^{-n}} - K(r-1)\right)$$

$\sigma_i = r^{i-1}(a - I_1) = r^{i-1}\sigma_1$ jer je $K(r-1) = K\dfrac{p}{m} = I_1$. Takođe je i $\sigma_i = S_{i-1} - S_i$,

$\sigma_n = S_{n-1}$, jer je $S_n = 0$.

Primer 5. Odrediti ukupnu kamatu i stanje duga posle vraćenog 15-tog anuiteta, ako se kredit amortizuje metodom jednakih mesečnih anuiteta, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 10,14% za period od 3 godine pri čemu je 18-ta otplata (učešće otplate u 18-tom anuitetu) 14 900 dinara.

Rešenje. p = 0,1014, t = 3god., m = 12, $n = 3 \cdot 12 = 36$, $\sigma_{18} = 14900$, I = ?, S_i = ?

Kako je $I = na - K$ moramo najpre da odredimo K i a. $r = 1 + \frac{0{,}1014}{12} = 1{,}00845$

Kako nam je data 18-ta otplata, vrednost kredita ćemo izračunati iz formule

$$\sigma_i = K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n - 1} \Rightarrow K = \frac{\sigma_i}{r-1} \cdot \frac{r^n - 1}{r^{i-1}}$$

$$K = \frac{14900}{1{,}00845 - 1} \cdot \frac{1{,}00845^{36} - 1}{1{,}00845^{17}} = 540700{,}602$$

Anuitet računamo po formuli

$$a = K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}} \Rightarrow a = 540700 \cdot \frac{1{,}00845 - 1}{1 - 1{,}00845^{-36}} = 17485{,}324,$$

pa je ukupna kamata $I = 36 \cdot 17485{,}324 - 540700{,}602 = 88771{,}062$.

Stanje duga nakon vraćenog 15. anuiteta je

$$S_{15} = K\frac{r^{36} - r^{15}}{r^{36} - 1} = 540700 \cdot \frac{1{,}00845^{36} - 1{,}00845^{15}}{1{,}00845^{36} - 1} = 335125{,}86$$

Otplaćeni deo duga nakon isplaćenog *i*-tog anuiteta

Kako je zbir otplaćenog dela duga (Q_i) i ostatka duga (S_i) nakon ispalćenog i-tog anuiteta jednak celom iznosu duga (kredita) K, to iz $Q_i + S_i = K$ na osnovu dobijene formule za S_i dobijamo

$$Q_i = K - S_i = K - K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1} = K\frac{r^n - 1 - (r^n - r^i)}{r^n - 1}, \text{ odnosno } Q_i = K\frac{r^i - 1}{r^n - 1}.$$

Otplaćeni deo duga posle i-tog anuiteta može se izraziti i kao zbir prvih i otplata

$$Q_i = \sum_{k=1}^{i} \sigma_k = \sum_{k=1}^{i} r^{k-1}(a - I_1) = (a - I_1)\sum_{k=1}^{i} r^{k-1} = (a - I_1)(r^0 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1}) =$$

$$= (a - I_1)\frac{r^i - 1}{r - 1} = \left(K\frac{r-1}{1-r^{-n}} - K\frac{p}{m}\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} = \left(K\frac{(r-1)r^n}{r^n - 1} - K(r-1)\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} =$$

$$= K(r-1)\left(\frac{r^n - (r^n - 1)}{r^n - 1}\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} = K\frac{r^i - 1}{r^n - 1}$$

Dakle $Q_i = \sum_{k=1}^{i} \sigma_k = K \frac{r^i - 1}{r^n - 1}$

Analiza amortizacije kredita metodom jenakih anuiteta i amortizacioni plan

S obzirom a je a = *const*. dužnik je nominalno podjednako opterećen u toku čitavog perioda amorizacije kredita.

Posmatramo niz otplata (σ_i) i niz kamata (I_i).

$\sigma_i = r^{i-1}\sigma \Rightarrow \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} = \frac{r^i \sigma_1}{r^{i-1}\sigma_1} = r > 1 \Rightarrow \sigma_{i+1} > \sigma_i$ što znači da je niz otplata (σ_i) opadajući, odnosno otplate se povećavaju iz anuiteta u anuitet.

Iz $S_i > S_{i+1} \Rightarrow S_i \frac{p}{m} > S_{i+1} \frac{p}{m} \Leftrightarrow I_i > I_{i+1}$ sledi da je niz kamata (I_i) opadajući, što znači da se kamate iz anuiteta u anuitet smanjuju.

U prvim anuitetima je učešće otplata manje, pa se stanje duga procentualno manje smanjuje, dok se najveće otplate duga vraćaju u poslednjim anuitetima. Ta razlika je izraženija što je period amortizacije duži. Kod dugoročnih kredita (najčešće stambenih), stanje duga ostaje gotovo nepromenjeno u prvih nekoliko godina. Anuiteti najvećim delom sadrže samo kamatu. Tek kasnije počinje da se smanjuje i stanje duga.

Plan amortizacije kredita se i kod ove metode može pregledno prikazati tabelom.

Primer 6. Napraviti plan amortizacije kredita od 10 000 eura sa deset jednakih tromesečnih anuiteta po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 7,5%.

Redni broj anuiteta	**Anuitet**	**Kamata**	**Otplata**	**Stanje duga**
	$a = K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}}$	$I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$	$\sigma_i = a - I_i$	$S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1}$
1	1105,995	187,500	918,495	9081,505
2	1105,995	172,095	933,900	8147,605
3	1105,995	152,768	953,227	7194,378
4	1105,995	134,895	971,100	6223,278
5	1105,995	116,686	989,309	5233,969
6	1105,995	98,137	1007,858	4226,111
7	1105,995	79,240	1026,755	3199,356
8	1105,995	59,988	1046,607	2153,349
9	1105,995	40,375	1065,620	1087,729
10	1105,995	21,395	1087,700	0
Σ	11059,95	1063,079	10000,571	

Za K = 10000, m = 4, p = 0,075, n = 10, $\Rightarrow r = 1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{0{,}075}{4} = 1{,}01875$.

Najpre se izračunava anuitet $a = K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}} = 10000\frac{1{,}01875-1}{1-1{,}01875^{-10}} = 1105{,}995$.

Kamatu izračunavamo po formuli $I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$, pa je

$I_1 = S_0\frac{p}{m} = 10000 \cdot 0{,}01875 = 187{,}5$, otplatu računamo po formuli $\sigma_i = a - I_i$, pa je

σ_1 = 1105,995 – 187,5 = 918,495. Kako je $\sigma_i = S_{i-1} - S_i \Rightarrow S_i = S_{i-1} - \sigma_i$.

$S_1 = S_0 - \sigma_1$ = 10000 – 918,495 = 9081, 505

$I_2 = S_1 \frac{p}{m} = 9081{,}505 \cdot 0{,}01875 = 172{,}095 \Rightarrow \sigma_2 = a - I_2 = 1105{,}995 - 172{,}095 =$
$= 933{,}900 \Rightarrow S_2 = S_1 - \sigma_1 = 9081{,}505 - 918{,}495 = 8147{,}605$

Kontrola ispravnosti izračunavanja je $S_n = 0$ i $\sigma_n = S_{n-1}$. Moguće je i $S_n \approx 0$ i $\sigma_n \approx S_{n-1}$ zbog zaokruživanja rezultata prilikom računanja.

Takođe je $\sum_{i=1}^{n} a = na = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ i $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = K$. Odstupanja u ovom primeru su dozvoljena i rezultat su zaokruživanja.

Isti obrasci se koriste i kad se primenjuje konformna kamatna stopa. Potrebno je samo $\frac{p}{m}$ zameniti sa $p_{k,m}$.

Primer 6. Ako se kredit od 1 000 000 dinara amortizuje za 5 godina tromesečnim anuitetima po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12% godišnje, izračunati stanje duga posle 10 isplaćenih anuiteta kao i ukupnu kamatau:

a) po metodi jednakih otplata,
b) po metodi jednakih anuiteta.

Rešenje. K = 1 000 000, t = 5god., m = 12/3 = 4, $n = tm = 5 \cdot 4 = 20$, p = 0,12,

$r = 1 + \frac{0{,}12}{4} = 1{,}03$, S_{10} = ? I = ?

a) stanje duga po metodi jednakih otplata nakon i-tog anuiteta, računa se po formuli $S_i = K - i\sigma = K - i\frac{K}{n} \Rightarrow S_{10} = 1000000 - 10\frac{1000000}{20} = 500000$

   ukupna kamata je $I = \frac{K \cdot p(n+1)}{2m} = \frac{1000000 \cdot 0{,}12 \cdot 21}{8} = 315000$.

b) stanje duga po metodi jednakih anuiteta nakon i-tog anuiteta, računa se po formuli $S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1}$, pa je $S_{10} = 1000000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1{,}03^{10}}{1{,}03^{20} - 1} = 573200{,}993$

ukupna kamata je $I = n \cdot a - K = n \cdot K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}} - K =$

$$= 20 \cdot 1000000 \cdot \frac{1{,}03-1}{1-1{,}03^{-20}} - 1000000 = 344387{,}184.$$

Pitanja i zadaci

1. Opiši ukratko model kredita sa jednakim otplatama.
2. Opiši ukratko model kredita sa jednakim anuitetima.
3. Kredit od 160000 dinara se amortizuje metodom jednakih otplata sa mesečnim anuitetima po konformnoj kamatnoj stopi koja je ekvivalentna dekurzivnoj godišnjoj kamatnoj stopi 19,74% za vreme od 2 godine. Izračunaj ukupnu kamatu, prvi i poslednji anuitet . Kolika bi bila ukupna kamata da je umesto konformne računata relativna kamatna stopa?
4. Kredit od 8000 eura amortizuje se mesečnim jednakim anuitetima za period od 5 godina i 6 meseci uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 7,52%. Izračunati vrednost anuiteta, ukupnu kamatu i stanje duga posle 20-tog anuiteta.
5. Kredit od 128000 dinara amortizuje se metodom jednakih otplata mesečnim anuitetima na period od 2godine i 3 meseca uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 20,12%. Izračunati vrednost prvog, i poslednjeg anuiteta. Koliko je ukupno novca vraćeno?
6. Kredit od 5000 eura amortizuje se za 4 godine mesečnim anuitetima sa godišnjom kamatnom stopom 18,25%. Odrediti stanje duga nakon dve godine ako se kredit amortizuje:
   a. metodom jednakih anuiteta
   b. metodom jednakih otplata .
7. Kredit od 200000 se amortizuje metodom jednakih anuiteta za 2 godine i 6 meseci sa mesečnim anuitetima. Obračun kamate je po konformnoj kamatnoj stopi koja je ekvivalentna godišnjoj dekurzivnoj kamatnoj stopi

od 8,56%. Izračunati koliko je ukupno vraćeno novca, učešće kamate u petom i otplate u dvadesetom anuitetu. Kolika bi bila ukupna kamata da je umesto konformne primenjena relativna kamatna stopa?

8. Kredit od 200 000 dinara se amortizuje mesečno metodom jednakih otplata sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 16,36% za period od 2 godine. Izračunaj učešće kamate u prvom i poslednjem anuitetu, vrednost tih anuiteta i ukupnu kamatu. Kolika bi bila ukupna kamata da je umesto konformne primenjena relativna kamatna stopa?
9. Kredit od 368000 dinara se amortizuje mesečno metodom jednakih anuiteta sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 12,6% za vreme od 3 godine i 6 meseci. Izračunati vrednost anuiteta, stanje duga posle isteka prve polovine perioda amortizacije i ukupnu kamatu.
10. Kredit od 168000 dinara amortizuje se za period od 3 godine, metodom jednakih otplata sa godišnjom dekurzivnom kamatnu stopom od 20,12%. Izračunaj vrednost prvog i 15-tog anuiteta
    a. upotrebom relativne
    b. upotrebom konformne kamatne stope.
    c. Izračunaj razliku ukupnih kamata izračunatih primenom relativne i konformne kamatne stope.

DODATAK

FORMULE ZA FINANSIJSKU MATEMATIKU

Prost kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$I = K_0 \cdot p \cdot t\,, K_0 = \frac{I}{p \cdot t}, \quad p = \frac{I}{K_0 \cdot t}, \quad t = \frac{I}{K_0 \cdot p}\,,\; K = K_0(1 + pt)$$

Složen kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$K_{tm} = K_0\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm}, \; t = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log r}$$

Odnos između komforne i relativne kamatne stope $p_{k,m} = \sqrt[m]{p+1} - 1$

Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$K_s = K_0\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1 + \frac{p \cdot t_d}{365}\right), \; r = 1 + \frac{p}{m}, \; t' = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log r},$$

$$t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right)$$

Prost kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom

$$I = Kqt\,,\; t = \frac{Kq}{I}, \; q = \frac{Kt}{I}, \; K = \frac{K_0}{1 - qt}$$

Složen kamatni račun sa anticipativnom kamatnom stopom

$$K_{tm} = \frac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm}}, \; t = \frac{\log \frac{K_0}{K_{tm}}}{m \log\left(1 - \frac{q}{m}\right)}$$

Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa anticipativnom kamatnom stopom

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}\left(1-\frac{q\cdot t_d}{365}\right)},\ t' = \frac{\log\frac{K_0}{K_{tm}}}{m\log\left(1-\frac{q}{m}\right)},\ t_d = \frac{365}{q}\left(1-\frac{K_0}{K_s\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}}\right)$$

Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$a_i = \sigma + I_i,\ \sigma = \frac{K}{n},\ I_i = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right),\ S_i = K\left(1-\frac{i}{n}\right),\quad Q_i = i\cdot\sigma = \frac{i\cdot K}{n},$$

$$I = \frac{K\cdot p(n+1)}{2m}$$

Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$r = 1+\frac{p}{m}\ \text{ili}\ r = 1+p_{k,m},\ a = K\cdot\frac{r-1}{1-r^{-n}},\ S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n-1},$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{i}\sigma_k = K\frac{r^i-1}{r^n-1},\ I = na - K$$

ISPITNA PITANJA

1. Šta je Dekartov proizvod skupova?
2. Kako se definiše preslikavanje?
3. Kad kažemo da je neko preslikavanje konstantno, a kad identično
4. Kad kažemo da je neko preslikavanje sirjekcija
5. Kad kažemo da je neko preslikavanje injekcija
6. Kad kažemo da je neko preslikavanje bijekcija?
7. Šta je inverzno preslikavanje?
8. Šta su nule funkcije i kako se određuju?
9. Kad kažemo da je funkcija parna, a kad da je neparna?
10. Šta je matrica?
11. Kako se definiše zbir dve matrice, a kako proizvod skalara i matrice? Navedi osobine koje važe za ove operacije.
12. Kako se definiše proizvod dve matrice, a kako stepen matrice? Navedi osobine koje važe za operaciju proizvod matrica.
13. Šta je determinanta matrice i kako se izračunava? Navedi svojstva determinanti.
14. Šta je minor, a šta kofaktor?
15. Šta je inverzna matrica i kako se izračunava?
16. Kad kažemo da je matrica regularna, a kad singularna?
17. Kako se definiše granična vrednost funkcije?
18. Navedi osobine graničnih vrednosti funkcija.
19. Kako se definiše neprekidnost funkcije u tački, a kako na intervalu?
20. Navedi osobine neprekidnih funkcija.
21. Kad kažemo da je prava $y = ax + b$ kosa a kad horizontalna asimptota funkcije? Kako se izračunavaju koeficijenti a i b?
22. Šta je vertikalna asimptota funkcije?
23. Kako glasi definicija prvog izvoda funkcija.
24. Kad kažemo da je funkcija diferencijabilna u tački, a kad na intervalu?

25. Navedi pravila diferenciranja.
26. Kako se traži izvod složene funkcije?
27. Kako glasi definicija lokalnog minimuma i lokalnog maksimuma?
28. Kad kažemo da je funkcija monotono rastuća, monotono neopadajuća, monotono opadajuća i monotono nerastuća na nekom intervalu?
29. Kako se određuje monotonost funkcije pomoću prvog izvoda?
30. Kako se određuju ekstremne vrednosti funkcije?
31. Kad kažemo da je funkcija konveksna, a kad konkavna na nekom intervalu?
32. Kako se određuje konveksnost i konkavnost pomoću drugog izvoda funkcije?
33. Kako se određuju prevojne tačke funkcije?
34. Navedi definiciju primitivne funkcije.
35. Navedi definiciju neodređenog integrala. Šta je podintegralna funkcija, a šta podintegralni izraz?
36. Navedi osobine neodređenog integrala.
37. Navedi osnovna pravila integracije.
38. Objasni metod integracije pomoći smene.
39. Objasni parcijalnu integraciju.
40. Objasni integraciju racionalnih funkcija.
41. Navedi definiciju određenog integrala i Njutn-Lajbnicovu formulu.
42. Navedi osobine određenog integrala.
43. Kad kažemo da je određeni integral nesvojstveni integral?
44. Navedi osobine funkcije tražnje.
45. Navedi osobine funkcije ponude.
46. Šta je prihod i kako se može izraziti funkcija prihoda kao funkcija jedne promenljive?
47. Šta je funkcija graničnog prihoda? Objasni njenu ekonomsku interpretaciju.
48. Kako se definiše funkcija troškova i koje su njene osobine?

49. Definiši funkciju graničnih troškova i objasni njenu ekonomsku interpretaciju.
50. Šta je dobit? Šta je interval rentabilnosti i kako se određuje?
51. Šta je optimalni nivo proizvodnje i kako se određuje?
52. Koji modeli kamatnog računa postoje i po čemu se razlikuju?
53. Nabroj načine obračuna kamate i objasni ih.
54. Opiši ukratko model kredita sa jednakim otplatama.
55. Opiši ukratko model kredita sa jednakim anuitetima.

LITERATURA

[1] S. M. Bogdanović, M. Đ. Milojević, Ž. Lj. Popović, Matematika za studente ekonomije, Ekonomski fakultet Niš, 2006

[2] Dr M. Ž. Drenovak, Modeli Finansijske matematike u ekonomiji i menadžmentu, Borovo, 1997

[3] N. Tomašević, Matematika za ekonomiste, Viša poslovna škola Beograd, 2000.

[4] M. Ivović, Finansijska matematika, Ekonomski fakultet Beograd, 2003

[5] A. Zečević, Matematika, Viša poslovna škola Beograd, 1998

[6] Dr Ljubiša Kočinac, Linearna Algebra i analitička geometrija, Prosveta, Niš, 1997

[7] B. Boričić, M. Ivović, Matematika, Ekonomski fakultet, Beograd, 2001

[8] G. Čupona, Predavanja po Algebra, kn.I, Skopje, 1972

[9] A. Dabčević, N. Dravinac, I. Franić, B. Sekulić, B. Šego, Primena matematike za ekonomiste, Informator, Zagreb, 1987

[10] M. Milojević, S. Bogdanović, Zbirka rešenih zadataka iz matematike za studente ekonomije, Ekonomski fakultet Niš, 2004 (šesto izdanje)

[11] M. Miletić, Metodička zbirka zadataka Neodređeni integrali, Izdavačko informativni centar, Beograd, 1997

[12] M.Uščumlić, P. Miličić, Zbirka zadataka iz više matematike, Građevinska knjiga Beograd, 1973

[13] D. Stojiljković, Kvantitativna i kvalitativna analiza tražnje, Savremena administracija, Beograd, 1981

[14] B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1968.

[15] S. Stanić, Ž. Račić, Matematička analiza ekonomskih problema, Grmeč, Beograd, 1998

[16] Dr Miroslav Drenak, Metodička zbirka rešenih zadataka (IV izdanje), Komino Trade Kraljevo, 2004

[17] Dr Marko Backović, Dr Jovo Vuleta, Ekonomsko matematički metodi i modeli (VII izdanje), Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta Beograd, 2009

[18] Marko Backović, Jovo Vuleta, Ivana Prica, Zoran Popović, Ekonomsko matematički metodi i modeli, Zbirka rešenih zadataka (XI izdanje), Centar za izdavačku delatnost, Ekonomskog fakulteta Beograd, 2009

[19] Dr Jelena Kočović, Dr Miroslav Pavlović, Uvod u finansijsku matematiku, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Beograd, 2010

[20] Dr Jelena Kočović, Dr Tatjana Rakonjac-Antić; Zbirka rešenih zadataka iz Finansijske i aktuarske matematike, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet, Beograd 2010.

CIP - Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд

51(075.8)
51-77:33(075.8)

СТАНКОВИЋ, Валентина, 1962-
Matematika za ekonomiste / Valentina Stanković. - Leskovac : Visoka poslovna škola strukovnih studija, 2016 (Niš : Scero-print). - 173 str. : graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 160. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. - Bibliografija: str. 172-173.

ISBN 978-86-84331-64-1

a) Математика b) Привредна математика
COBISS.SR-ID 227382796

Visoka poslovna škola strukovnih studija Leskovac
Vlade Jovanovića 8, 16000 Leskovac
e-mail: mail@vpsle.edu.rs, http://www.vpsle.edu.rs
tel.: +381 16 254 961, faks: +381 16 242 536

The publication has been funded within the freamework of the European Union Tempus programme which is funded by the Directorate General for Development and Co-operation - Europe Aid and the Directorate General for Enlargement.

Projest No. 544543 - TEMPUS - 1-2013-1-RS-TEMPUS-JPCR